平成30度前期 微分方程式 演習 18.04.18 番号　　　　氏名 解答例

[1] 次の微分方程式の一般解を導け
(1) $f'(x)=3f(x)$
(2) $f'(x)-2f(x)=e^x$

[2] [1](1) の解は一般解の形のものしかないことを説明せよ。

[3] 次の微分方程式の初期値問題を解け.
(1) $f'(x)=3f(x)$, $f(0)=1$
(2) $f'(x)-2f(x)=e^x$, $f(0)=3$

定係数一階線形微分方程式

$y'+ay=r(t)$ ----①

※ $r(t)\equiv 0$ の場合「斉次」, $r(t)\not\equiv 0$ の時「非斉次」という。

※ 独立変数は, t や x で, 関数は y や f で表わされることが多い。

$y=Ce^{-at}$ [Cは定数] (斉次)

$y=\left(\int r(t)e^{at}dt+C\right)e^{-at}$ (非斉次) ---②

① の両辺に e^{at} をかけると

左辺 $=e^{at}y'+ae^{at}y=(e^{at}y)'$ より

$(e^{at}y)'=e^{at}r(t)$ を得る

両辺を積分して ② を得る。

微分の公式, 積分の公式

$e^{ax} \underset{積分}{\overset{微分}{\rightleftarrows}} ae^{ax}$

$\begin{matrix}\cos ax\\ \sin ax\end{matrix} \begin{matrix}\rightarrow\\ \leftarrow\end{matrix} \begin{matrix}-a\sin ax\\ a\cos ax\end{matrix}$

$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$

$f(g(x))'=g'(x)f'(g(x))$

$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx$

$(G'(x)=g(x))$ 部分積分

※ 初期値問題では代入して, 定数を求める。

[1] (1) $f(x)=Ce^{3x}$, Cは定数

(2) $f(x)=\left(\int e^x e^{-2x}dx+C\right)e^{2x}$

$=\left(\int e^{-x}dx+C\right)e^{2x}$

$=(-e^{-x}+C)e^{2x}$

$=-e^{x}+Ce^{2x}$ (Cは定数)

[2] 両辺に e^{-3x} をかけると

$e^{-3x}f'(x)-3e^{-3x}f(x)=0$

$\frac{d}{dx}\left[e^{-3x}f(x)\right]=0$

この式は $e^{-3x}f(x)=C$ (Cは定数) であることを意味する。

よって $f(x)=Ce^{3x}$ となる。

[3] (1) 一般解は $f(x)=Ce^{3x}$ (Cは定数)

$f(0)=1$ より $Ce^0=1$, $C=1$

よって $f(x)=e^{3x}$

(2) 一般解は

$f(x)=-e^{-x}+Ce^{2x}$ (Cは定数)

$f(0)=3$ より

$f(0)=-1+C=3$, $C=4$

$f(x)=-e^{-x}+4e^{2x}$