平成 30 度前期 微分方程式 演習 18.04.25　　番号　　　　　　　　氏名　解答例

[1] 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'-3ty=0$　（ y は t を変数とする関数）

(2) $y'-3ty=t$

[2] 次の微分方程式の特解と一般解を未定係数法を用いて求めよ。

(1) $y'-3y=t^3+1$　(2) $y'+2y=\sin t$

[3] 次の微分方程式の初期値問題を解け

$y'+2y=4t^3-1,\quad y(1)=0$

変数係数の一階線形微分方程式

$$y'+p(t)y=0 \quad (\text{斉次})$$

$P(t)$ を $p(t)$ の不定積分(原始関数)とする。

$$e^{P(t)}y'+p(t)e^{P(t)}y=0$$

$$(e^{P(t)}y)'=0$$

$$e^{P(t)}y=c \quad (c\text{ は定数})$$

$$y=ce^{-P(t)}$$ が一般解

(これ以外にない)

$$y'+p(t)y=f(t) \quad (\text{非斉次})$$

$$e^{P(t)}y'+e^{P(t)}p(t)y=f(t)e^{P(t)}$$

$$(e^{P(t)}y)'=f(t)e^{P(t)}$$

$$y=e^{-P(t)}\int f(t)e^{P(t)}dt$$

◎ 未定係数法(特解を求める方法)

一般解 = 特解 + 斉次方程式の一般解

($y'+ay=0 \Leftrightarrow y=ce^{-at}$ cは定数)

右辺が n次式

$\Rightarrow$ 特解も n次式

右辺が $\sin ax, \cos ax$

$\Rightarrow$ 特解 $=K_1\sin ax+K_2\cos ax$

右辺が e^{bx} $\Rightarrow$ 特解 $=Ke^{bx}$

◎ 初期値問題では，一般解の中から初期条件に合うものを見つける。

[1] 斉次方程式の一般解は

(1) $$ce^{+\int_0^t 3s\,ds}=ce^{\frac{3}{2}t^2} \quad (c\text{は定数})$$

(2) $$e^{\int_0^t 3s\,ds}\left(\int_0^t e^{-\int_0^s 3u\,du}s\,ds+c\right)$$

$$=e^{\frac{3}{2}t^2}\left(\int_0^t se^{-\frac{3}{2}s^2}ds\right)+c)$$

$$=e^{\frac{3}{2}t^2}\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t^2}+c'\right) \quad \left(c'=c+\frac{1}{3}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}+c'e^{\frac{3}{2}t^2} \quad c, c'\text{は定数}$$

[2] (1) 特解を $at^3+bt^2+ct+d=y_0$ とおく

$$y_0'-3y_0=t^3+1$$

$$3at^2+2bt+c-3at^3-3bt^2-3ct-3d=t^3+1$$

$$-3a=1,\ -3b+3a=0,\ 2b-3c=0,\ c-3d=1$$

$$a=-\frac{1}{3},\ b=a=-\frac{1}{3}$$

$$c=\frac{2}{3}b=-\frac{2}{9},\ d=-\frac{11}{27}$$

斉次方程式の一般解は Ce^{3t} (Cは定数) なので，一般解は

$$y=-\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{3}-\frac{2}{9}t-\frac{11}{27}+Ce^{3t} \cdots ①$$

(Cは定数)

(2) 特解を $y_0=a\sin t+b\cos t$ とおく

$y_0'+2y=\sin t$ より，$a\cos t-b\sin t+2a\sin t+2b\cos t=\sin t$

$$a+2b=0 \quad 2a-b=1,\ a=\frac{2}{5},\ b=-\frac{1}{5}$$

斉次方程式の一般解は Ce^{-2t} (Cは定数)

よって一般解は

$$\frac{2}{5}\sin t-\frac{1}{5}\cos t+Ce^{-2t} \quad (C\text{は定数})$$

[3] $y=at^3+bt^2+ct+d$ とおくと

これが $y'+2y'=4t^3-1$ を満すので

$$2at^3+(3a+2b)t^2+(2b+2c)t+(c+2d)=4t^3-1$$

係数を比較して $a=2,\ b=-3,\ c=3,\ d=-2$,

よって特解 $2t^3-3t^2+3t-2$ を得る。

対応する斉次方程式の一般解は

Ce^{-2t} (Cは定数)なので，求める一般解は

$$y=2t^3-3t^2+3t-2+Ce^{-2t}$$

Cは定数.