平成30度前期 微分方程式 演習 18.05.09 番号 氏名 解答例

[1] 次の微分方程式の特性方程式を求め，解のタイプと解を求めよ。

(1) $y''+4y'+5y=0$

(2) $y''+3y'+2y=0$

(3) $y''-8y'+16y=0$

[2] [1] (1)〜(3)の微分方程式の一般解を求めよ。

[3] [2]で求めた一般解が，それぞれの方程式を満たすことを確かめよ。

[補足]

定係数の2階線形微分方程式(斉次)

$y''+ay'+by=0$ に対して

$\lambda^2+a\lambda+b=0$

をこの方程式の特性方程式という。

特性方程式の解に対して一般解が次のように定まる。

(1) 2つの異なる実数解 $\alpha,\beta$ を持つとき

$C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$, $C_1,C_2$ *は実定数*

がこの方程式の一般解となる。

(2) 重解 $\alpha$ を持つとき

$C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$, $C_1,C_2$ *は実定数*

がこの方程式の一般解となる。

(3) 複素解 $\alpha\pm\beta i$ を持つとき

$C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x)+C_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ $C_1,C_2$ *は実定数*

がこの方程式の一般解となる。

複素数 $\alpha+\beta i$ に対して指数関数は

$e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))$

と定められている。(オイラーの公式)

複素係数を整理して，実数のみで表すと(3)の形になる。複素数の指数関数も(加法定理を用いると)指数法則が成り立つことがわかるので，同様の性質を持つ。

[1] (1) $\lambda^2+4\lambda+5=0$

$\lambda=-2\pm i$ 複素解(非実数)

(2) $\lambda^2+3\lambda+2=0$

$\lambda=-1,-2$, 2実数解

(3) $\lambda^2-8\lambda+16=0$

$\lambda=4$ 重解

[2] (1) $C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{-2x}\sin x$

$C_1,C_2$は定数

(2) $C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

$C_1,C_2$は定数

(3) $C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}$

$C_1\ C_2$は定数

[3] (1) $y=C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{-2x}\sin x$とおく

$C_1,C_2$は定数.

$y''+4y'+5y$

$=(3C_1-4C_2)e^{-2x}\cos x+(4C_1+3C_2)e^{-2x}\sin x$

$+4(-2C_1+C_2)e^{-2x}\cos x+4(-C_1-2C_2)e^{-2x}\sin x$

$+5C_1e^{-2x}\cos x \quad +5C_2e^{-2x}\sin x=0$

(2) $y''+3y'+2y$

$=C_1e^{-x}+4C_2e^{-2x}$

$+3(-C_1e^{-x}-2C_2e^{-2x})$

$+2(C_1e^{-x}+C_2e^{-2x})=0$

(3) $y''-8y'+16y$

$=16C_1e^{4x}+16C_2xe^{4x}+8C_2e^{4x}$

$-32C_1e^{4x}-32C_2xe^{4x}-8C_2e^{4x}$

$+16C_1e^{4x}+16C_2xe^{4x}=0$