平成 30 度前期 微分方程式 演習 18.05.16 番号 氏名 解答例

[1] 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y''+2y'+2y=0$

(2) $y''-6y'+9y=0$

(3) $y''+2y'-15y=0$

[2] [1] の各微分方程式に対して，基本解系を一組定め,よ。また基本解系 y_1, y_2 に対して，$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ がひとつの変数で行列式が 0 でないことを確認せよ。

[3] [1] (2) の解に対して， $y(0)=1, y'(0)=2$ を満たすものを求めよ。

[補足]

定係数線形 2 階微分方程式 (斉次)

$$y''+ay'+by=0 \qquad (1)$$

の一般解は, 特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ の解の種類ごとに次のようになる。

(実数解 α, β を持つ場合) $C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$

(重解 α を持つ場合) $C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$

(複素解 $\alpha\pm\beta i$ を持つ場合)

$$C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x)+C_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

(いずれも C_1, C_2 は任意の定数)

(1) の解 y_1, y_2 が一次独立である場合，(y_1, y_2) を基本解系という。これに対して次が同値

(1) y_1, y_2 が一次独立である。

(2) ひとつの x に対して $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ 。

(3) 全ての x に対して $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ 。

一般解 $y=C_1y_1+C_2y_2$ が(定数 C_1, C_2 の自由度をもって) 求められた場合，ひとつの変数の値を $x=a$ を固定して， $y(a)=b, y'(a)=c$ を満たす解を定めることができる。

連立方程式

$$C_1y_1(a)+C_2y_2(a)=b$$
$$C_1y_1'(a)+C_2y_2'(a)=c$$

を解けばよい。(基本解系であれば解がある)

[1] (1) 特性方程式は複素解(非実数) $-1\pm i$ を持つので一般解は

$C_1e^{x}\cos x+C_2e^{x}\sin x$, C_1, C_2 は定数

(2) 特性方程式は重解 3 を持つので一般解は

$C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$, C_1, C_2 は定数

(3) 特性方程式は 2 実解 $3, -5$ を持つので一般解は

$C_1e^{3x}+C_2e^{-5x}$, C_1, C_2 は定数

[2] (1) $y_1(x)=e^{x}\cos x$, $y_2(x)=e^{x}\sin x$

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(2) $y_1(x)=e^{3x}$, $y_2(x)=xe^{3x}$

$y_1'(x)=3e^{3x}$, $y_2'(x)=3xe^{3x}+e^{3x}$

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(3) $y_1(x)=e^{3x}$, $y_2(x)=e^{-5x}$

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -8$$

[3] 一般解は

$y(x)=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$

C_1, C_2 は定数

$y(0)=C_1+C_2\times 0=1$

$y'(0)=3C_1+C_2=2$

$C_1=1$, $C_2=-1$.

よって求める解は

$y=e^{3x}-xe^{3x}$