平成30度前期 微分方程式 演習 18.05.23 番号　　　　　　氏名 解答例

[1] 微分方程式

$$y''+ay'+by=r(x) \qquad (1)$$

の解として $u(x)$ がひとつ定まっている。
特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重解 α を持つ場合に(1)の一般解は

$$y=u(x)+C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$$

,(C_1, C_2 は定数) となることを説明せよ。

[2] α,β を[1]で定めた実数とし

$$y(x)=C_1(x)e^{\alpha x}+C_2(x)xe^{\alpha x}$$

と置く。 C_1, C_2 が

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \alpha xe^{\alpha x}+e^{\alpha x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

を満たせば, (1)の解になることを示せ。

[3] 上の方法を用いて $y''-4y'+4y=e^x$ の一般解を求めよ。

[補足] (1)に対応する斉次方程式の解は特性方程式のタイプごとに次のようになる(C_1, C_2 は実定数)。この場合の一般解は「任意の解が必ずこの形で書ける」としてよい。(p46 定理 2.3 参照)

2つ実数解 α,β がある場合
$C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$

重解 α がある場合
$C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$

複素解 $\alpha\pm\beta i$ がある場合
$C_1e^{\alpha x}\cos\beta y+C_2e^{\alpha x}\sin\beta y$

$u(x)$, $v(x)$ が (1)の解であるとき
$u(x)-v(x)$ は対応する斉次方程式

$$y''+ay'+by=0 \qquad (2)$$

の解になる。したがって何でもいいからひとつ (1) の解 $u(x)$ を固定して $u(x)$ と斉次方程式の一般解の和で(1)の一般解を表すことができる。
(p 63 定理 2.7)

それぞれの基本解系 y_1, y_2 を用いて

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

を満たすように $C_1(x), C_2(x)$ を定めれば,
$C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ が(1)の解になる。
(p64 参照)

[1] $v(x)$ を(1)の任意の解とし
$w(x)=v(x)-u(x)$ とおく
u, v は共に(1)の解なので

$$v''+av'+bv=r(x)$$
$$u''+au'+bu=r(x)$$

両辺の差を考え, $w''=v''-u''$, $w'=v'-u'$ であることを用いると

$$w''+aw'+bw=0 \qquad (2)$$

(2)の一般解は, 任意定数 C_1, C_2 を用いて
$w=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$ $(=v-u)$
と表わせるので

$$v=u+C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$$

[2] 条件より

$$C_1'(x)e^{\alpha x}+C_2'(x)xe^{\alpha x}=0 \quad \cdots(3)$$
$$C_1'(x)\alpha e^{\alpha x}+C_2'(x)(\alpha xe^{\alpha x}+e^{\alpha x})=r(x) \quad \cdots(4)$$

$y=C_1(x)e^{\alpha x}+C_2(x)xe^{\alpha x}$

$y'=C_1'(x)e^{\alpha x}+C_1(x)\alpha e^{\alpha x}+C_2'(x)xe^{\alpha x}+C_2(x)(\alpha xe^{\alpha x}+e^{\alpha x})$
$=C_1(x)\alpha e^{\alpha x}+C_2(x)(\alpha xe^{\alpha x}+e^{\alpha x})$ ((3)より)

$y''=C_1'(x)\alpha e^{\alpha x}+C_1(x)\alpha^2e^{\alpha x}+C_2'(x)(\alpha xe^{\alpha x}+e^{\alpha x})$
$+C_2(x)(\alpha^2xe^{\alpha x}+2\alpha e^{\alpha x})$
$=C_1(x)\alpha^2e^{\alpha x}+C_2(x)(\alpha^2xe^{\alpha x}+2\alpha e^{\alpha x})$
$+r(x)$ ((4)を用いた)

$y''+ay'+by$
$=C_1(x)(\alpha^2+a\alpha+b)e^{\alpha x}+C_2(x)(\alpha^2+a\alpha+b)xe^{\alpha x}$
$+C_2(x)(2\alpha+a)e^{\alpha x}+r(x) \quad \cdots(5)$

(α は $\lambda^2+a\lambda+b=0$ の重解なので, $\lambda^2+a\lambda+b=(\lambda-\alpha)^2$
$=\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2$, $a=-2\alpha$, $b=\alpha^2$ よって
$\alpha^2+a\alpha+b=2\alpha+a=0$)

(5) $=r(x)$

[3] 特性方程式が重解2を持つので

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x}+e^{2x} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -xe^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

を満せば $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$ が特解となる。

$C_1=-\int xe^{-x}dx=xe^{-x}+e^{-x}$

$C_2=\int e^{-x}dx=-e^{-x}$

斉次方程式の一般解 $K_1e^{2x}+K_2xe^{2x}$
(K_1, K_2 は定数) と合わせて一般解は
$C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+K_1e^{2x}+K_2xe^{2x}$
$=e^x+K_1e^{2x}+K_2xe^{2x}$