平成30度前期 微分方程式 演習 18.5.30 番号 氏名 解答例

[1]次の微分方程式の一般解を未定係数法を用いて求めよ。

$$y''+y'-2y=x+e^x$$

[2]次の微分方程式の一般解を未定係数法を用いて求めよ。

$$y''-2y'+y'=xe^x$$

[3]次の微分方程式の一般解を未定係数法を用いて求めよ。

$$y''-2y'+2y=e^{-x}\sin x$$

[補足]

線形微分方程式の解は，特解(ひとつの解)と斉次方程式の一般解の和の形であらわすことができる。
特解は，右辺の関数の種類と，斉次方程式のかたちとの関係で，いくつかの未知の係数を求める形で求めることができる。

◎係数付の特解の設定の仕方

(右辺が n 次式の場合)

$$y=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$$

(未知の係数は $n+1$ 個)

(右辺が $e^{\alpha x}$ の場合，
α が特性方程式の解でない場合)

$y=ae^{\alpha x}$ (未知の係数は 1 個)

(右辺が $e^{\alpha x}$ の場合，
α が特性方程式の重解でない解の場合)

$y=axe^{\alpha x}$ (未知の係数は 1 個)

(右辺が $e^{\alpha x}$ の場合，
α が特性方程式の は重解の場合)

$y=ax^2e^{\alpha x}$ (未知の係数は 1 個)

(右辺が $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$ ，$\alpha\pm\beta i$ が特性方程式の解で無い場合)

$y=a_1e^{\alpha x}\cos\beta x+a_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

(未知の係数は2個)

(右辺が $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$ ，$\alpha\pm\beta i$ が特性方程式の解の場合)

$y=a_1xe^{\alpha x}\sin\beta x+a_2xe^{\alpha x}\sin\beta x$

(未知の係数は2個)

※ 右辺が上記の組み合わせの場合はそれぞれの形で求めて加える。

右辺が $xe^{\alpha x}$ のとき

αが解でない　$y=axe^{\alpha x}+be^{\alpha x}$

αが重解でない解　$y=ax^2e^{\alpha x}+bxe^{\alpha x}$

αが重解　$y=ax^3e^{\alpha x}+bx^2e^{\alpha x}$

[1] $y_1=ax+b$ とおくとき

$y_1''+y_1'-2y_1=a-2ax-2b=x$

を満すには，$a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$ であればよい

$\left(y_1=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)$ 〈e^xが斉次方程式の解〉

$y_2=cxe^x$ が $y_2''+y_2'-2y_2=3ce^x=e^x$

を満すには $y_2=\frac{x}{3}e^x$ $\left(c=\frac{1}{3}\right)$ であればよい。

よって $y_1+y_2=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{x}{3}e^x$ が特解

斉次方程式の一般解$(C_1e^x+C_2e^{-2x})$と合わせて

$-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{x}{3}e^x+C_1e^x+C_2e^{-2x}$

$(C_1, C_2$ は定数$)$

が一般解となる。

[2] $y_1=ax^3e^x+bx^2e^x$ とおくと

$y_1''-2y_1'+y_1=6axe^x+2be^x=xe^x$

を満すには $y_1=\frac{1}{6}x^3e^x$ $\left(a=\frac{1}{6}, b=0\right)$

であればよい。斉次方程式の一般解

$(C_1e^x+C_2xe^x)$と合わせて，一般解は

$\frac{1}{6}x^3e^x+C_1e^x+C_2xe^x$ $(C_1, C_2$ は定数$)$

[3] $y_1(x)=ae^{-x}\cos x+be^{-x}\sin x$ とおくと

$y_1''-2y_1'+2y_1=4(a-b)e^{-x}\cos x+4(a+b)e^{-x}\sin x$
$=e^{-x}\sin x$

となるためには $a=b=\frac{1}{8}$

斉次方程式の一般解$(C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x)$

と合わせて，一般解は

$\frac{1}{8}e^{-x}(\cos x+\sin x)+e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$

$(C_1, C_2$ は定数$)$