平成30度前期 微分方程式 演習 18.06.06　番号　　　　氏名 解答例

[1] 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y''+4y'+8y=0$
(2) $y''+5y'+6y=0$
(3) $y''-6y'+9y=0$

[2] 非斉次の2階微分方程式(定係数)
$y''+ay'+by=r(x)$ に対して，基本解系
y_1, y_2 を用いて

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$ を満たすよう

に $C_1(x), C_2(x)$ を定めれば，
$C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ が解になることを用いて，
次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$y''+5y'+6y=e^{-2x}$$

[3] 未定係数法を用いて次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y''+4y'+8y=x^2$
(2) $y''-6y'+9y=e^{3x}$

次のところに解説がある。
[1]: 5月16日の演習及び教科書 p.44-p.50
[2] : 5月23日の演習及び教科書 p.63～p.65
[3]: 5月30日の演習及び教科書 p.67 ～p.70

[3] (2) $y=ax^2e^{3x}$ とおく
$y'=3ax^2e^{3x}+2axe^{3x}$
$y''=9ax^2e^{3x}+12axe^{3x}+2ae^{3x}$
$y''-6y'+9y(=2ae^{3x})=e^{3x}$ より
$a=\frac{1}{2}$ よって
$\frac{1}{2}x^2e^{3x}+C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$
(C_1, C_2 は定数) が一般解.

[1] (1) 特性方程式 $\lambda^2+4\lambda+8=0$ が
非実数解 $-2\pm2i$ を持つので
$C_1e^{-2x}\cos 2x+C_2e^{-2x}\sin 2x$
(C_1, C_2 は定数) が一般解

(2) 特性方程式 $\lambda^2+5\lambda+6=0$ が
2実解 $-2, -3$ を持つので
$C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$ (C_1, C_2 は定数)
が一般解

(3) 特性方程式 $\lambda^2-6\lambda+9=0$ が
重解3を持つので
$C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ (C_1, C_2 は定数)
が一般解.

[2] $\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$ が基本解系なので，

$$\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3e^{2x} & e^{2x} \\ -2e^{3x} & -e^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -e^{x} \end{pmatrix}$$

$C_1=\int dx=x+k_1$, $C_2=\int -e^{x}dx=-e^{x}+k_2$

よって

$C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}=xe^{-2x}+k_1e^{-2x}$
$-e^{-2x}+k_2e^{-3x}$　($k_1'=k_1-1$)
$=xe^{-2x}+k_1'e^{-2x}+k_2e^{-3x}$ (k_1', k_2 は定数)

[3] (1) $y=ax^2+bx+c$ とおく
$y''+4y'+8y=8ax^2+(8a+8b)x+2a+4b+8c$
$=x^2$ より
$a=\frac{1}{8}$, $b=-\frac{1}{8}$, $c=\frac{-1}{32}$
よって
$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}+C_1e^{-2x}\cos 2x$
$+C_2e^{-2x}\sin 2x$ (C_1, C_2 は定数)
が一般解.