平成30度前期 微分方程式 演習 18.06.13 番号 　　　　氏名 解答例

[1] 微分方程式 $y''-2y'+2y=e^{-x}\sin x$ に対して $y(0)=y'(0)=0$ を満たす解を求めよ。
ただし $\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x+\cos x)$ が特解であることは計算せずに用いてよい。

[2] 微分方程式 $y''+4y=e^{x}$ に対して $\frac{1}{5}e^{x}$ が特解である。境界条件 $y(0)=0, y(\frac{\pi}{4})=0$ を満たす解をもとめよ。

[3] 上の微分方程式に対して，境界条件 $y'(0)=0$ $y'(\pi)=0$ に対して解が存在しないことを示せ。

[初期値問題] 定係数2階非斉次方程式

$$y''+ay'+by=r(x) \qquad (1)$$

に対して，基本解系 $\phi(x), \psi(x)$ が求まったとき，特解 $y_0(x)$ が見つかると

$y_0(x)+c_1\phi(x)+c_2\psi(x)$ ☆ (c_1, c_2 は任意定数)

が一般解となる。したがって初期値問題

$$y(x_0)=A, y'(x_0)=B$$

に対して

$$y_0(x_0)+c_1\phi(x_0)+c_2\psi(x_0)=A$$
$$y_0'(x_0)+c_1\phi'(x_0)+c_2\psi'(x_0)=B$$

の連立方程式を満たす c_1, c_2 を求めることができれば， $y_0+c_1\phi(x)+c_2\psi(x)$ が解となる。

境界値問題:同様に定義域の両端での値が指定した値になるようにとく問題を境界値問題という。

$y(0)=y(l)=0$ を*ディリクレ問題*,

$y'(0)=y'(l)=0$ を*ノイマン問題*という。

これらの境界値問題に対しても， C_1, C_2 を求める問題に帰着される。一般に境界条件が

$y(x_1)=p,\ y(x_2)=q$

又は ($y'(x_1)=p,\ y'(x_2)=q$)

で与えられるとき，上記の解の表現☆に代入して整理すると C_1, C_2 の連立方程式

$$\alpha_1C_1+\beta_1C_2=\gamma_1$$
$$\alpha_2C_1+\beta_2C_2=\gamma_2$$

を得る。この連立方程式は

(1) $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$ のとき一意の解がある。

(2) $\alpha_1:\alpha_2=\beta_1:\beta_2\neq\gamma_1:\gamma_2$ のとき解が存在しない。

(3) $\alpha_1:\alpha_2=\beta_1:\beta_2=\gamma_1:\gamma_2$ のとき解は無限に存在する。

(一般には，連立方程式を行列を用いて表現したときの，逆行列の存在やランクの比較などで，記述することができる. 教科書p85～86を参照。)

[1] 特解として $\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x+\cos x)$ が与えられているので，一般解は

$y(x)=\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C_1e^{x}\cos x+C_2e^{x}\sin x$

C_1, C_2 は定数

(特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+2=0$ の解が $1\pm i$ より)

$y'(x)=\frac{-2}{4}e^{-x}\sin x+C_1(-e^{x}\sin x+e^{x}\cos x)$
$\quad+C_2(e^{x}\cos x+e^{x}\sin x)$

$y(0)=\frac{1}{4}+C_1=0$, $C_1=-\frac{1}{4}$

$y'(0)=0+C_1+C_2=0$, $C_2=-C_1=\frac{1}{4}$

よって求める解は

$y(x)=\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x+\cos x)+\frac{1}{4}e^{x}(\sin x-\cos x)$

[2] 対応する斉次方程式の特性方程式 $\lambda^2+4=0$ は $\pm 2i$ を解とするので特解 $\frac{1}{5}e^{x}$ に対して

$y=\frac{1}{5}e^{x}+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

が一般解、$y_0=0$, $y(\frac{\pi}{4})=0$ より

$C_1+\frac{1}{5}=0$, $C_1=-\frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}e^{\frac{\pi}{4}}+C_2=0$, $C_2=-\frac{1}{5}e^{\frac{\pi}{4}}$

$y=\frac{1}{5}e^{x}-\frac{1}{5}\cos 2x-\frac{1}{5}e^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x$

が求める解となる.

[3] [2]と同様に

$y=\frac{1}{5}e^{x}+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

$y'=\frac{1}{5}e^{x}-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x$

$y'(0)=\frac{1}{5}+2C_2=0$

$y'(\pi)=\frac{1}{5}e^{\pi}+2C_2=0$

$C_2=\frac{-1}{10}$, $C_2=\frac{-1}{10}e^{\pi}$ は両立しないので解はない。