平成30度前期 微分方程式 演習 18.06.20　番号　　　　氏名 解答例

[1] 次の微分方程式の一般解を，定係数の微分方程式に帰着させた上で求めよ。

$$x^2y''(x)-4xy'(x)+4y(x)=0$$

[2] 次の微分方程式の初期値問題に対して解が存在するかどうか，定係数の微分方程式に帰着させた上で答えよ。

$$x^2y''(x)-4xy'(x)+4y(x)=0,$$
$$y(0)=1,\quad y'(0)=2$$

[3] 次の微分方程式の一般解を，定係数の微分方程式に帰着させた上で求めよ。

$$x^2y''(x)-4xy'(x)+4y(x)=x^2$$

[補足]　$x^2y''(x)-axy'(x)+by(x)=r(x)$

の形の微分方程式を，コーシーの微分方程式という。この方程式は，定係数ではないが，定係数の方程式に変形することができる。

$x>0$ に対して $x=e^t$ と変数変すると，

$y(x)=y(e^t)$ なので，

$$\frac{dy}{dt}=e^t\frac{dy}{dx},\ x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dy}{dx}+(e^t)^2\frac{d^2y}{dx^2},\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx}$$

と変形されるので，t に関する微分方程式と見て

$$y''(t)+(a-1)y'(t)+by(t)=r(e^t)$$

という微分方程式になる。これは定係数の微分方程式なので，特解および特性方程式

$$\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$$

解に基づいて得られる斉次方程式の一般解により，一般解を作ることができる。

[1]　$x=e^t$ とおくと

$$\frac{dy}{dt}=e^t\frac{dy}{dx}=x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=e^t\frac{dy}{dx}+(e^t)^2\frac{d^2y}{dx^2}=x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$x^2y''(x)-4xy'(x)+4y(x)=0$$

$$p''(t)-5p'(t)+4p(t)=0$$

$$(\ p(t)=y(e^t)\ )$$

特性方程式 $\lambda^2-5\lambda+4=0$ は $1,4$ を解とするので

$$C_1e^t+C_2e^{4t}$$
$$=C_1x+C_2x^4\quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

が一般解．

[2]　$y=C_1x+C_2x^4$ (C_1, C_2 は定数)

が一般解なので，

$y(0)=0$，$y'(0)=C_1$

$y(0)=1$ にはならないので

解はない．

[3]　$x=e^t$ とおくとき [1] と同様に

$$p''(t)-5p'(t)+4p(t)=e^{2t}$$

$p_0(t)=Ce^{2t}$ とおくと

$$p_0''(t)-5p_0'(t)+4p_0(t)$$
$$=4Ce^{2t}-10Ce^{2t}+4Ce^{2t}$$
$$=-2Ce^{2t}$$

これが e^{2t} と一致するとき，

$C=-\frac{1}{2}$ となるので，一般解は

$$-\frac{1}{2}e^{2t}+C_1e^t+C_2e^{4t}$$

$$-\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2x^4\quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

が一般解．