平成 30 度前期 微分方程式 演習　18.06.27　番号　　　　　　　　氏名 解答例

[1] 次の微分方程式と同等の連立微分方程式を作れ。

(1)　$y''+2y'-3y=\sin x$

(2)　$y''-4y'+4y=x^2$

[2] 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)-3y(t) \\ y'(t)=\frac{5}{3}x(t)-y(t) \end{cases}$$

[3] [2] の連立微分方程式の初期値問題

$x(0)=1, y(0)=0$　を解け。

[補足]

2 階の線形微分方程式は次のようにして，連立微分方程式に帰着することができる。

$$y''+ay'+by=f(x)$$

(1)　$y_1(x)=y(x), y_2(x)=y'(x)$　とする。

(2)　$y_1'(x)=y_2(x)$　がひとつの方程式

(3)　$y_2(x)=y''(x)=-ay'-by+f(x)$

$=-by_1-ay_2+f(x)$

連立微分方程式

$$\begin{cases} x'(t)=ax(t)+by(t)+f(t) \\ y'(t)=cx(t)+dy(t)+g(t) \end{cases} \quad (1)$$

も次のように 2 階の線形微分方程式に帰着できる。

$$y(t)=\frac{1}{b}x'(t)-\frac{a}{b}x(t)-\frac{f(t)}{b}$$

この両辺を微分すると

$$y'(t)=\frac{1}{b}x''(t)-\frac{a}{b}x'(t)-\frac{f'(t)}{b}$$

(係数は全て定数としている)

それぞれ第 2 式に代入して

$$\frac{1}{b}x''(t)-\frac{a}{b}x'(t)-\frac{f'(t)}{b}=$$

$$cx(t)+d\left(\frac{1}{b}x'(t)-\frac{a}{b}x(t)-\frac{f(t)}{b}\right)+g(t)$$

これを整理すると 2 階の線形微分方程式となる。

(a,b,c,d　が　t　の関数でも項が増えるだけで同様の変形ができる。)

また，(1)は ベクトル関数と行列を用いて

$$\vec{x}'(t)=A\vec{x}(t)+\vec{f}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad \vec{f}=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

と表すことができる。

[1]

(1)　$y_1=y,\ y_2=y'$

$y_1'=y_2$

$y_2'=3y_1-2y_2+\sin x$

(2)　$y_1=y,\ y_2=y'$

$y_1'=y_2$

$y_2'=-4y_1+4y_2+x^2$

[2]　$3y(t)=x(t)-x'(t)$

$\frac{1}{3}x'(t)-\frac{1}{3}x''(t)=\frac{5}{3}x(t)-\frac{1}{3}x(t)+\frac{1}{3}x'(t)$

$x''(t)+4x(t)=0$

特性方程式 $\lambda^2+4=0$ は非実数解

$\pm 2i$ を持つので

$x(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$

C_1, C_2 は定数が一般解

このとき，

$y(t)=\frac{1}{3}(x(t)-x'(t))$

$=\frac{1}{3}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$

$+2C_1\sin 2t-2C_2\cos 2t)$

$=\frac{1}{3}(C_1-2C_2)\cos 2t+\frac{1}{3}(2C_1+C_2)\sin 2t$

[3]　$x(0)=1$，$y(0)=0$ より

$$\begin{cases} C_1\cos 0+C_2\sin 0=1 \\ \frac{1}{3}(C_1-2C_2)\cos 0+\frac{1}{3}(2C_1+C_2)\sin 2t=0 \end{cases}$$

$C_1=1$

$\frac{1}{3}(C_1-2C_2)=0$，$C_2=\frac{1}{2}$

$x(t)=\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$

$y(t)=\frac{5}{6}\sin 2t$