平成30度前期 微分方程式 演習 18.07.04 番号 　　　　　　　　　氏名 解答例

[1] 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ ，に対して， 3,−1 が固有値，それぞれ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ が対応する固有ベクトルである。このとき実数 t に対して e^{tA} を求めよ。

[2] [1] で求めた行列 e^{tA} に対して，

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}$$

が成り立つことを示せ。ただし行列やベクトルの値をとる関数の微分は各成分を微分したものとする。

[3] [1] で求めた行列 e^{tA} に対して，

$$e^{tA}e^{-tA}=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。

[補足] 行列 A と実数 t に対して

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}$$

により行列の指数関数を定義することができる。この無限級数は必ず収束する。行列Aが，2つの固有値 λ_1,λ_2 と対応する固有ベクトル

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{2,1}\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}a_{1,2}\\a_{2,2}\end{pmatrix}$$

を持つ場合(必ずあるわけではない)，

$P=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}\\a_{2,1}&a_{2,2}\end{pmatrix}$ に対して， $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

が成り立つ。これを用いると

$$A^k=P\begin{pmatrix}\lambda_1^k&0\\0&\lambda_2^k\end{pmatrix}P^{-1}\quad,\quad e^{tA}=P\begin{pmatrix}e^{t\lambda_1}&0\\0&e^{t\lambda_2}\end{pmatrix}P^{-1}$$

となる。一般に

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA},\quad e^{tA}e^{sA}=e^{(t+s)A}$$

(特別な場合に[2],[3] で示す。固有値，固有ベクトルを用いた式は成り立つものとして計算して確かめる。)

[1]のヒント

$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ と置くとき， $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}$.

[1] $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$$A^n=\left(P^{-1}\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}P\right)^n=P^{-1}\begin{pmatrix}3^n&0\\0&(-1)^n\end{pmatrix}P$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}=P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix}3^k&0\\0&(-1)^k\end{pmatrix}\right)P$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix}e^{3t}&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}P$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{3t}+e^{-t}&e^{3t}-e^{-t}\\e^{3t}-e^{-t}&e^{3t}+e^{-t}\end{pmatrix}$$

[2]

$$(e^{tA})'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(e^{3t}+e^{-t})'&(e^{3t}-e^{-t})'\\(e^{3t}-e^{-t})'&(e^{3t}+e^{-t})'\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3e^{3t}-e^{-t}&3e^{3t}+e^{-t}\\3e^{3t}+e^{-t}&3e^{3t}-e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$Ae^{tA}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{3t}+e^{-t},&e^{3t}-e^{-t}\\e^{3t}-e^{-t},&e^{3t}+e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3e^{3t}-e^{-t}&3e^{3t}+e^{-t}\\3e^{3t}+e^{-t}&3e^{3t}-e^{t}\end{pmatrix}$$

よって $(e^{tA})'=Ae^{tA}$

[3]

$$e^{tA}e^{-tA}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{3t}+e^{-t}&e^{3t}-e^{-t}\\e^{3t}-e^{-t}&e^{3t}+e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-3t}+e^{t}&e^{-3t}-e^{t}\\e^{-3t}-e^{t}&e^{-3t}+e^{t}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2+2&0+0\\0+0&2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$