2019 度前期 微分方程式 演習 19.04.24　番号　　　　氏名 解答例

[1] y_1 と y_2 が次の微分方程式を満たす解であるとする。

$$y' - 3ty = t$$

このとき，$y = y_1 - y_2$ は次の微分方程式を満たすことを示せ。

$$y' - 3ty = 0$$

[2] 次の微分方程式の特解と一般解を未定係数法を用いて求めよ。

(1) $y' - 3y = t^3 + 1$　(2) $y' + 2y = \sin t$

[3] 次の微分方程式の初期値問題を解け

$y' - 3y = t^3 + 1,\quad y(0) = 0$

◎ 微分方程式

$$y' + ay = f(t) \quad \cdots ①$$

の解 y_1, y_2 に対して

$$y_1' + ay_1 = f(t)$$
$$y_2' + ay_2 = f(t)$$
$$(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = 0$$

よって $y_1 - y_2$ は $y' + ay = 0$ の解。②

見方を変えると ① の一般解は，① のひとつの解に ② の一般解を加えたものである。

◎ ① の右辺 $f(t)$ の形によって，係数をいくつか仮に決めることで，特解（ひとつの解を見つけることができる）

f が n 次式 $\Rightarrow$ y も n 次式，係数は $n+1$ コ

$f(t) = e^{bt} \Rightarrow y = ce^{bt}$ (cは係数) $a \neq b$

$y = Cxe^{at}$ $(a = b)$

$f(t) = \alpha\cos bt + \beta\sin bt$

$\Rightarrow y = C_1\cos bt + C_2\sin bt$

[1]

$$y_1' - 3ty_1 = t$$
$$y_2' - 3ty_2 = t$$
$$(y_1 - y_2)' - 3t(y_1 - y_2) = 0$$
$$y' - 3ty = 0$$
$$y = y_1 - y_2$$

[2](1) $y = at^3 + bt^2 + ct + d$ とおく

$y' - 3y = t^3 + 1$ より

$3at^2 + 2bt + c - 3at^3 - 3bt^2 - 3ct - 3d = t^3 + 1$

$-3a = 1,\ -3b + 3a = 0$

$2b - 3c = 0\quad c - 3d = 1$

$a = b = -\frac{1}{3},\ c = \frac{2}{+3}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9}$

$d = \frac{-11}{27}$

$y = -\frac{1}{3}\left(t^3 + t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{11}{9}\right) + ce^{3t}$

（ce^{3t} は斉次方程式の一般解）

(2) $y = a\cos t + b\sin t$ とおく

$y' + 2y = \sin t$ より

$-a\sin t + b\cos t + 2a\cos t + 2b\sin t = \sin t$

$(2b - a)\sin t + (2a + b)\cos t = \sin t$

$2b - a = 1,\ 2a + b = 0$

$-4a - a = 1,\ a = -\frac{1}{5}\quad b = \frac{2}{5}$

$y = -\frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t + ce^{-2t}$

[3] [2](1) より一般解は

$y = -\frac{1}{3}\left(t^3 + t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{11}{9}\right) + ce^{3t}$

$y(0) = -\frac{11}{27} + ce^0 = 0$ より $c = \frac{11}{27}$

$y = -\frac{1}{3}\left(t^3 + t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{11}{9}\right) + \frac{11}{27}e^{3t}$