2019 度前期 微分方程式 演習 19.05.08 学籍番号　　　　　氏名　解答例

[1] 次の微分方程式を解け(変数分離形)

$$y'=x(y^2-1)$$

[2] 次の微分方程式を解け(同次形)

$$y'=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

[3] 次の微分方程式を解け(ベルヌーイ形)

$$y'+y=y^3\cos x$$

(変数分離形)

$y'=p(x)g(y)$ の形になるもの

$$\frac{dy}{dx}=p(x)g(y) \Rightarrow \int\frac{1}{g(y)}dy=\int p(x)dx$$

($\frac{1}{g(y)}y'=p(x)$ の両辺を x で積分

左辺は置換積分として見る)

(同次形)

$y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$ の形に変形できるもの

$u=\frac{y}{x}\left(=\frac{y(x)}{x}\right)$ とおくと

$$y=xu,\quad y'=u+xu'$$

$$xu'=y'-u=g(u)-u$$

$$u'=\frac{1}{x}(g(u)-u)$$

(変数分離形)

(ベルヌーイ型)

$y'+p(x)y=g(x)y^m$ の形 …①

$u=y^{1-m}$ とおくと

$$u'=y'(1-m)y^{-m}$$

① の両辺に $(1-m)y^{-m}$ をかけて

$$(1-m)y'y^{-m}+(1-m)p(x)y^{1-m}=(1-m)g(x)$$

$$u'+(1-m)p(x)u=(1-m)g(x)$$

(一階線形微分方程式,非斉次)

☆ さらに整理して

$$\log\left|\frac{(y-x)(y+x)}{y}\right|=C,\quad (y-x)(y+x)=C'y$$

$C'=\pm e^C$ (定数)

$y^2-x^2=C'y$ ($y\equiv 0$ も解)

[1]

$$\int\frac{y'}{y^2-1}dx=\int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left\{\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy\right\}=\frac{x^2}{2}+C$$

$$\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=x^2+C$$

[2]

$$y'=\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$u=\frac{y}{x}$ とおくと $y=xu$

$$y'=u+xu'$$

$$u+xu'=\frac{2u}{1+u^2}$$

$$xu'=\frac{u-u^3}{1+u^2}$$

$$\frac{u^2+1}{u^3-u}u'=-\frac{1}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}\right)du=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\log\left|\frac{(u-1)(u+1)}{u}\right|=-\log|x|+C$$

$$\log\left|\frac{(y-x)(y+x)}{xy}\right|=-\log|x|+C$$

…☆

[3] $u=y^{-2}$ とおく

$$u'=-2y^{-3}y',\quad y^{-3}y'=-\frac{1}{2}u'$$

与式の両辺を y^3 で割って

$$y^{-3}y'+y^{-2}=\cos x$$

$$-\frac{1}{2}u'+u=\cos x,\quad u'-2u=-2\cos x$$

$u=a\sin x+b\cos x$ とおくと

$$u'-2u=(a-2b)\cos x-(b+2a)\sin x$$

$$=-2\cos x$$

より $a=-\frac{2}{5}$, $b=\frac{4}{5}$

斉次方程式 $u'-2u=0$ の一般解は

$u=Ce^{2x}$ より

$$u(=y^{-2})=\frac{4}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x+Ce^{2x}$$

$$y=\left(\frac{4}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x+Ce^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

C は定数