2019度前期 微分方程式 演習　19.05.15学籍番号　　　　　　氏名　解答例

[1] 次の微分方程式の特性方程式および，特性方程式の解を求めよ。

(1) $y''-6y'+9y=0$　(2) $y''+2y'+2y=0$

(3) $y''-4y'-32y=0$　(4) $y''+y=0$

(5) $y''+y'=0$

[2] [1](1)〜(5)の微分方程式の一般解を求めよ。

[3] [2](1)〜(3)で求めた一般解が，それぞれの方程式を満たすことを確かめよ。

[補足]

定係数の2階線形微分方程式(斉次)

$y''+ay'+by=0$ に対して

$\lambda^2+a\lambda+b=0$

をこの方程式の特性方程式という。

特性方程式の解に対して一般解が次のように定まる。

(1) 2つの異なる実数解 α,β を持つとき

$C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$,　C_1,C_2は実定数

がこの方程式の一般解となる。

(2) 重解 α を持つとき

$C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$,　C_1,C_2は実定数

がこの方程式の一般解となる。

(3) 非実数解 $\alpha\pm\beta i$ を持つとき($\beta\neq 0$)

$C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x)+C_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$　C_1,C_2は実定数

がこの方程式の一般解となる。

複素数 $\alpha+\beta i$ に対して指数関数は

$e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))$

と定められている。(オイラーの公式)

複素係数を整理して，実数のみで表すと(3)の形になる。複素数の指数関数も(加法定理を用いると)指数法則が成り立つことがわかるので，同様の性質を持つ。

[1] (1) $\lambda^2-6\lambda+9=0$, $\lambda=3$(重解)

(2) $\lambda^2+2\lambda+2=0$, $\lambda=-1\pm i$

(3) $\lambda^2-4\lambda-32=0$, $\lambda=8,-4$

(4) $\lambda^2+1=0$　$\lambda=\pm i$

(5) $\lambda^2+\lambda=0$　$\lambda=0,-1$

[2] (1) $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$

C_1, C_2は定数(以下略す)

(2) $y=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x$

(3) $y=C_1e^{8x}+C_2e^{-4x}$

(4) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$

(5) $y=C_1+C_2e^{-x}$

[3] (1) $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ とおく

(C_1, C_2は定数，以下略)

$$
\begin{aligned}
&y''-6y'+9y\\
&=9C_1e^{3x}+C_2(6e^{3x}+9xe^{3x})\\
&\quad-18C_1e^{3x}-6C_2(e^{3x}+3xe^{3x})\\
&\quad+9(C_1e^{3x}+C_2xe^{3x})=0
\end{aligned}
$$

(2) $y=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x$ とおく

$$
\begin{aligned}
&y''+2y'+2y\\
&=2C_1e^{-x}\sin x-2C_2e^{-x}\cos x\\
&\quad+2C_1(-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x)\\
&\quad+2C_2(-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)\\
&\quad+2C_1e^{-x}\cos x+2C_2e^{-x}\sin x=0
\end{aligned}
$$

(3) $y=C_1e^{8x}+C_2e^{-4x}$ とおく

$$
\begin{aligned}
&y''-4y'-32y\\
&=64C_1e^{8x}+16C_2e^{-4x}\\
&\quad-4(8C_1e^{8x}-4C_2e^{-4x})\\
&\quad-32(C_1e^{8x}+C_2e^{-4x})=0
\end{aligned}
$$