2019度前期 微分方程式 演習 19.05.22 学籍番号　　　　　　氏名 解答例

[1] 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y''+2y'+y=0$

(2) $y''-6y'+10y=0$

(3) $y''+3y'-10y=0$

[2] [1] の各微分方程式に対して，基本解系を一組定めよ。また基本解系 y_1, y_2 に対して，$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ 変数が 0 及び 1 の時の行列式が 0 でないことを確認せよ。

[3] [1] (1) の解に対して，$y(0)=1, y'(0)=0$ を満たすものを求めよ。

[補足]

定係数線形 2 階微分方程式 (斉次)

$$y''+ay'+by=0 \qquad (1)$$

の一般解は，特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ の解の種類ごとに次のようになる。

(実数解 α, β を持つ場合) $C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$

(重解 α を持つ場合) $C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$

(複素解 $\alpha\pm\beta i$ を持つ場合)

$C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x)+C_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

(いずれも C_1, C_2 は任意の定数)

(1) の解 y_1, y_2 が一次独立である場合，(y_1, y_2) を基本解系という。これに対して次が同値

(1) y_1, y_2 が一次独立である。

(2) ひとつの x に対して $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ 。

(3) 全ての x に対して $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ 。

一般解 $y=C_1y_1+C_2y_2$ が(定数 C_1, C_2 の自由度をもって) 求められた場合，ひとつの変数の値を $x=a$ を固定して，$y(a)=b, y'(a)=c$ を満たす解を定めることができる。

連立方程式

$$C_1y_1(a)+C_2y_2(a)=b$$
$$C_1y_1'(a)+C_2y_2'(a)=c$$

を解けばよい。(基本解系であれば解がある)

[1](1) 特性方程式 $\lambda^2+2\lambda+1=0$ が重解 -1 を持つので，一般解は

$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

(C_1, C_2 は定数)

(2) 特性方程式 $\lambda^2-6\lambda+10=0$ は複素解 $3\pm i$ を持つので，一般解は，

$y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ (C_1, C_2 は定数)

(3) 特性方程式 $\lambda^2+3\lambda-10y=0$ は異なる実数解 $2, -5$ を持つので，一般解は

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}$ (C_1, C_2 は定数)

[2](1) $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ が基本解系

$x=0, 1$ のとき $[(e^{-x})'=-e^{-x}, (xe^{-x})'=e^{-x}-xe^{-x}]$

$\begin{vmatrix} e^0 & 0e^0 \\ -e^0 & e^0-0e^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} e^{-1} & 1e^{-1} \\ -e^{-1} & e^{-1}-1e^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-1} & e^{-1} \\ -e^{-1} & 0 \end{vmatrix} = e^{-2} \neq 0$

(2) $\{e^{3x}\cos x, e^{3x}\sin x\}$ が基本解系

$(e^{3x}\cos x)' = e^{3x}(3\cos x-\sin x)$

$(e^{3x}\sin x)' = e^{3x}(3\sin x+\cos x)$

$x=0$ のとき

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$x=1$ のとき

$\begin{vmatrix} e^3\cos 1, & e^3\sin 1 \\ e^3(3\cos 1-\sin 1), & e^3(3\sin 1+\cos 1) \end{vmatrix} = e^6 \neq 0$

(3) $\{e^{2x}, e^{-5x}\}$ が基本解系

$x=0$ のとき $((e^{2x})'=2e^{2x}, (e^{-5x})'=-5e^{-5x})$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

$x=1$ のとき

$\begin{vmatrix} e^2 & e^{-5} \\ 2e^2 & -5e^{-5} \end{vmatrix} = -7e^{-3} \neq 0$

[3] 一般解が $C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$ $(=y)$

$y(0)=1$ より $C_1=1$

$y'(0)=0$ より $\{-C_1e^{-x}+C_2(e^{-x}-xe^{-x})\}\big|_{x=0}=0$

$-C_1+C_2=0$, $C_2=+1$.

よって $y=e^{-x}+xe^{-x}$