2019 度前期 微分方程式 演習 19.05.29 学籍番号　　　　氏名 解答例

[1] 定数 α, β ($\alpha \neq \beta$) に対して,
関数 $C_1(x), C_2(x)$ が 次の等式を満たせば,

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

$y = C_1(x)e^{\alpha x} + C_2(x)e^{\beta x}$ は

$$y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y = r(x)$$

の解になることを示せ。

[2] [1] の場合の(定数変化法を用いた), 2 階線形微分方程式の解の公式を導け。

[3] 上の方法を用いて $y'' - 5y' + 4y = e^x$ の一般解を求めよ。

[補足] 微分方程式

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad (1)$$

に対応する斉次方程式の解は特性方程式のタイプごとに次のようになる(C_1, C_2 は実定数)。この場合の一般解は「任意の解が必ずこの形で書ける」としてよい。(p46 定理 2.3 参照)

2 つ実数解 α, β がある場合

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

重解 α がある場合

$$C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$$

複素解 $\alpha \pm \beta i$ がある場合

$$C_1 e^{\alpha x}\cos\beta y + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta y$$

$u(x), v(x)$ が (1)の解であるとき
$u(x) - v(x)$ は対応する斉次方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (2)$$

の解になる。したがって何でもいいからひとつ (1) の解 $u(x)$ を固定して $u(x)$ と斉次方程式の一般解の和で(1)の一般解を表すことができる。
(p 63 定理 2.7)

斉次方程式の基本解系 y_1, y_2 を用いて

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

を満たすように $C_1(x), C_2(x)$ を定めれば,
$C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ が(1)の解になる。

[略証] (3)の第一成分を用いると

$$y' = (C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x))'$$
$$= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

同様に第 2 成分を用いて

$$y'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + r(x)$$

y_1, y_2 が斉次方程式の解なので次を得る。

$$y'' + ay' + by = r(x)$$

(詳しくは p64 参照)

[1] $y' = \alpha C_1(x) e^{\alpha x} + \beta C_2(x) e^{\beta x} + C_1'(x) e^{\alpha x} + C_2'(x) e^{\beta x}$ …①

条件の第一成分より

$C_1'(x) e^{\alpha x} + C_2'(x) e^{\beta x} = 0$

① $= \alpha C_1(x) e^{\alpha x} + \beta C_2(x) e^{\beta x}$

$y'' = \alpha^2 C_1(x) e^{\alpha x} + \beta^2 C_2(x) e^{\beta x} + \alpha C_1'(x) e^{\alpha x} + \beta C_2'(x) e^{\beta x}$ …②

条件の第二成分より

$\alpha C_1'(x) e^{\alpha x} + \beta C_2'(x) e^{\beta x} = r(x)$

② $= \alpha^2 C_1(x) e^{\alpha x} + \beta^2 C_2(x) e^{\beta x} + r(x)$

$y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y$
$= (\alpha^2 - (\alpha+\beta)\alpha + \alpha\beta)e^{\alpha x} + (\beta^2 - (\alpha+\beta)\beta + \alpha\beta)e^{\beta x} + r(x) = r(x)$

[2]
$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\beta-\alpha} e^{-(\alpha+\beta)x}\begin{pmatrix} \beta e^{\beta x} & -e^{\beta x} \\ -\alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix} -e^{-\alpha x} r(x) \\ e^{-\beta x} r(x) \end{pmatrix}$$

$C_1(x) = \frac{1}{\alpha-\beta}\int e^{-\alpha x} r(x)\,dx + k_1$

$C_2(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int e^{-\beta x} r(x)\,dx + k_2$

k_1, k_2 は定数

$C_1(x)e^{\alpha x} + C_2(x)e^{\beta x}$ が一般解

[3] 特性方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ は
2実解 1, 4 を持つ

$C_1 = \frac{1}{-3}\int e^{-x}e^{x}\,dx + k_1 = -\frac{x}{3} + k_1$

$C_2 = \frac{1}{3}\int e^{-4x}e^{x}\,dx + k_2 = -\frac{1}{9}e^{-3x} + k_2$

求める一般解は

$(-\frac{x}{3} + k_1)e^{x} + (-\frac{1}{9}e^{-3x} + k_2)e^{4x}$

$= -\frac{x}{3}e^{x} - \frac{1}{9}e^{x} + k_1 e^{x} + k_2 e^{4x}$

k_1, k_2 は定数