

[1] 次の微分方程式の一般解を未定係数法を用いて求めよ

$$y'' - 2y' - 3y = x^2 + e^x$$

[2] 次の微分方程式の一般解を未定係数法を用いて求めよ。

☆ y に訂正
 $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}$

[3] 次の微分方程式の一般解を未定係数法を用いて求めよ。

$$y'' + 4y = \sin 2x$$

[補足]

線形微分方程式の解は、特解(ひとつの解)と斉次方程式の一般解の和の形であらわすことができる。

特解は、右辺の関数の種類と、斉次方程式のかたちとの関係で、いくつかの未知の係数を求める形で求めることができる。

◎係数付の特解の設定の仕方

(右辺が n 次式の場合)

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (\text{未知の係数は } n+1 \text{ 個})$$

(右辺が $e^{\alpha x}$, α が特性方程式の解でない場合)

$$y = a e^{\alpha x} \quad (\text{未知の係数は } 1 \text{ 個})$$

(右辺が $e^{\alpha x}$, α が特性方程式の 1 重解) [2] は

$$y = a x e^{\alpha x} \quad (\text{未知の係数は } 1 \text{ 個})$$

(右辺が $e^{\alpha x}$, α が特性方程式のは 2 重解)

$$y = a x^2 e^{\alpha x} \quad (\text{係数は } 1 \text{ 個})$$

(右辺が $x e^{\alpha x}$, α が特性方程式のは k 重解

$k=0, 1, 2$ ($k=0$ のときは解でないという意味))

$$y = a x^{k+1} e^{\alpha x} + b x^k e^{\alpha x} \quad (\text{未知の係数は } 2 \text{ 個})$$

(右辺が $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$, $\alpha \pm \beta i$ が

特性方程式の解で無い場合)

$$y = a e^{\alpha x} \cos \beta x + b e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (\text{未知係数は } 2 \text{ 個})$$

(右辺が $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$, $\alpha \pm \beta i$ が

特性方程式の解の場合)

☆ $y = a x e^{\alpha x} \sin \beta x + b x e^{\alpha x} \sin \beta x$

↑
 $\cos \beta x$ に訂正
 (未知係数は 2 個)

※ 右辺が上記の組み合わせの場合はそれぞれの形で求めて加える。

※ 配布時に間違いがありました

☆ の付いている所を確認をお願いします

[1] $y_1 = ax^2 + bx + c$ とおくと

$$y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = x^2 \text{ とすると,}$$

$$2a - 2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = x^2$$

$$-3ax^2 + (-4a - 3b)x + (2a - 2b - 3c) = x^2$$

$$a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}a = \frac{4}{9}, c = \frac{2}{3}(a - b) = \frac{-14}{27}$$

$$y_2 = d e^x \text{ とおくと,}$$

$$y_2'' - 2y_2' - 3y_2 = e^x \text{ とすると}$$

$$(d - 2d - 3d)e^x = e^x, d = -\frac{1}{4}$$

特性方程式が 2 実解 $3, -1$ を持つので

$$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27} - \frac{1}{4}e^x + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

(C_1, C_2 は定数) が一般解。

[2] ☆ $y_1 = ax e^{-2x}$ とおくと

$$y_1'' + 5y_1' + 6y_1 = e^{-2x} \text{ を満たすとして,}$$

$$(-4a e^{-2x} + 4ax e^{-2x}) \leftarrow \text{積の}$$

$$+ 5(a e^{-2x} - 2ax e^{-2x})$$

$$+ 6ax e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$a e^{-2x} = e^{-2x}, a = 1$$

特性方程式が 2 実解 $-2, -3$ を持つので、各次方程式の一般解と合わせて

$$x e^{-2x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

(C_1, C_2 は定数) が一般解。

[3] $y_1 = a x \sin 2x + b x \cos 2x$ とおくと

$$y'' + 4y = \sin 2x \text{ を満たすとして,}$$

$$-4ax \sin 2x + 4a \cos 2x$$

$$-4bx \cos 2x - 4b \sin 2x$$

$$+ 4(ax \sin 2x + bx \cos 2x) = \sin 2x$$

$$a = 0, b = -\frac{1}{4}$$

特性方程式は複素解 $\pm 2i$ を持つので、各次方程式の一般解と合わせて

$$-\frac{1}{4}x \cos 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

(C_1, C_2 は定数) が一般解。