2019 度前期 微分方程式 演習　　19.06.19 籍番号　　　氏名　解答例

[1] 次の微分方程式の一般解を，定係数の微分方程式に帰着させた上で求めよ。

$$x^2 y''(x) - 4xy'(x) + 4y(x) = 0$$

[2] 次の微分方程式の初期値問題に対して解が存在するかどうか，定係数の微分方程式に帰着させた上で答えよ。

$$x^2 y''(x) - 4xy'(x) + 4y(x) = 0,$$
$$y(0) = 1,\quad y'(0) = 2$$

[3] 次の微分方程式の一般解を，定係数の微分方程式に帰着させた上で求めよ。

$$x^2 y''(x) - 4xy'(x) + 4y(x) = x^2$$

[補足]　$x^2 y''(x) - axy'(x) + by(x) = r(x)$

の形の微分方程式を，コーシーの微分方程式という。この方程式は，定係数ではないが，定係数の方程式に変形することができる。

$x>0$ に対して $x=e^t$ と変数変換すると，

$y(x)=y(e^t)$ なので，

$$\frac{dy}{dt} = e^t\frac{dy}{dx},\ x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t\frac{dy}{dx} + (e^t)^2\frac{d^2y}{dx^2},\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{\cancel{dx}\,dt}$$

と変形されるので，t に関する微分方程式と見て

$$y''(t) + (a-1)y'(t) + by(t) = r(e^t)$$

という微分方程式になる。これは定係数の微分方程式なので，特解および特性方程式

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$$

解に基づいて得られる斉次方程式の一般解により，一般解を作ることができる。

[1]　$x>0$ に対して　$x=e^t$ とおくと

$y(x) = y(e^t)$ に対して

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 4\left(\frac{dy}{dt}\right) + 4y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

特性方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ は 2実解 1, 4 を持つので一般解は

$y = C_1 e^t + C_2 e^{4t}$ （C_1, C_2 は定数）

$y = C_1 x + C_2 x^4$　…①

[2]　[1] より一般解は ① で与えられる

$(y' = C_1 + 4C_2 x^3)$

$y(0) = 0$ より $y(0)=1$ の条件は満さない。

[3]　[1] と同じ設定で t に関する方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 4y = e^{2t}$$

（2 は特性方程式の解でないので）

$y = Ke^{2t}$ （K は定数）とおくと

$$4Ke^{2t} - 10Ke^{2t} + 4Ke^{2t} = e^{2t}$$

$$-2Ke^{2t} = e^{2t},\ K = -\frac{1}{2}$$

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$= C_1 x + C_2 x^4 - \frac{1}{2}x^2$$

C_1, C_2 は定数