2019 度前期 微分方程式 演習 19.06.26 学籍番号 　　　　　　　氏名 解答例

[1] 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y''-4y'+5y=0$

(2) $y''-7y'+12y=0$

(3) $y''-6y'+9y=0$

[2] 次の微分方程式の一般解を定数変化法を用いて求めよ。

$$y''+5y'+6y=e^{-2x}$$

[3] 未定係数法を用いて次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y''+4y'+8y=x^2$

(2) $y''-6y'+9y=e^{3x}$

次のところに解説がある。

[1]: 5 月 15 日の演習及び教科書 p.44-p.50

[2] : 5 月 29 日の演習及び教科書 p.63～p.65

[3]: 6 月 05 日の演習及び教科書 p.67 ～p.70

基本解系が $\{\varphi, \psi\}$, 右辺が r のとき

$$\begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

となることを理解して, φ, ψ が決まった段階で, 具体的に計算すればよい。

[3] (2) 斉次方程式の特性方程式は 3 を重解として持つので 解を Cx^2e^{3x} とおく, 与式に代入して

$2Ce^{3x}=e^{3x}$, より $C=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x^2e^{3x}+C_1xe^{3x}+C_2e^{3x}$

(C_1, C_2 は定数) が一般解

[1] (1) 特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+5=0$ が非実数解 $2\pm i$ を持つので一般解は

$C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{2x}\sin x$

(C_1, C_2 は定数)

(2) 特性方程式 $\lambda^2-7\lambda+12=0$ が 2 実解 3, 4 を持つので一般解は

$C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$ (C_1, C_2 は定数)

(3) 特性方程式 $\lambda^2-6\lambda+9=0$ は重解 3 を持つので一般解は,

$C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ (C_1, C_2 は定数)

[2] 特性方程式 $\lambda^2+5\lambda+6=0$ が 2 実解 $-2, -3$ を持つので $\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$ が基本解系となる。解を

$C_1(x)e^{-2x}+C_2(x)e^{-3x}$

とおくと

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$=+e^{5x}\begin{pmatrix} 3e^{-3x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 \\ -e^{x} \end{pmatrix}$$

$C_1=\int 1\,dx=x+k_1$ 　$C_2=-\int e^x dx$

($k_1 k_2$ は定数) 　$=-e^x+k_2$

一般解は

$xe^{-2x}-e^{-2x}+k_1e^{-2x}+k_2e^{-3x}$

(k_1-1) を改めて k_1 として

$xe^{-2x}+k_1e^{-2x}+k_2e^{-3x}$

[3] (1) 特解を ax^2+bx+c とおくと

$2a+4(2ax+b)+8(ax^2+bx+c)=x^2$

より $a=\frac{1}{8}$, $b=-\frac{1}{8}$, $c=\frac{1}{32}$

斉次方程式の一般解は

$C_1e^{-2x}\cos 2x+C_2e^{-2x}\sin 2x$

(C_1, C_2 は定数)

$\frac{1}{8}(x^2-x+\frac{1}{4})+C_1e^{-2x}\cos 2x$

$+C_2e^{-2x}\sin 2x$ (C_1, C_2 は定数)