5月13日分演習の解答例

2020度前期 微分方程式 演習　学籍番号　　　　　氏名　解答例

[1] 次の微分方程式の一般解を導け

(1) $f'(x)=2f(x)$

(2) $f'(x)+2f(x)=x$

[2] [1](1)の解は一般解の形のものしかないことを説明せよ。

[3] 次の微分方程式の初期値問題を解け.

(1) $f'(x)=2f(x),\ f(0)=1$

(2) $f'(x)+2f(x)=x,\ f(0)=1$

---

[1] (1)　$(f'(x)-2f(x)=0)$

$$f(x)=Ce^{2x}\ (C\text{は定数})$$

が一般解

($f'+af=0$, $(f'=-af)$
の場合 $f=Ce^{-ax}$ (Cは定数))

(2)　(今度は $a=2$)

$$f(x)=\left(\int xe^{2x}dx\right)e^{-2x}$$

部分積分を用いる

不定積分には積分定数がある

$$=\left(\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx+C\right)e^{-2x}$$

$$=\left(\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C\right)e^{-2x}$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{-2x}$$

Cは定数

〈検算〉

$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{-2x}$ のとき

$$f'(x)+2f(x)=\frac{1}{2}-2Ce^{-2x}+2\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{-2x}\right)=x$$

解答としては検算は不要だが，ケアレスミスを防ぐために，時間に余裕がある時はやっておくとよい。

[2]　両辺に e^{-2x} をかけて

$$f'(x)e^{-2x}-2e^{-2x}f(x)=0$$

を得る。積の微分を逆に用いると

$$\left(f(x)e^{-2x}\right)'=0$$

を意味するので，$f(x)e^{-2x}$ が定数ということが分かる。その定数をCと置くと移項して

$$f(x)=Ce^{2x}$$

を得る。

[3] (1) 一般解は $f(x)=Ce^{2x}$
(Cは定数)なので $f(0)=1$ より

$$Ce^{0}=1,\quad C=1$$

よって $f(x)=e^{2x}$

(2) 一般解が

$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{-2x}$$

で与えられ $f(0)=1$ より

$$f(0)=\frac{0}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{-0}=1$$

$$C=\frac{5}{4}$$

よって

$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}e^{-2x}$$