# 演習解答例5月20日

2020度前期 微分方程式 演習 20.05.20 学籍番号 氏名

[1] $y_1$ と $y_2$ が次の微分方程式を満たす解であるとする。

$$y'-ty=t$$

このとき，$y=y_1-y_2$ は次の微分方程式を満たすことを示せ。

$$y'-ty=0$$

[2] 次の微分方程式の特解と一般解を未定係数法を用いて求めよ。

(1) $y'-y=t^3$ (2) $y'+2y=\sin t$

[3] 次の微分方程式の初期値問題を解け
(一般解は未定係数法を用いて求めよ)

$$y'-3y=t^2+1 \quad , \quad y(0)=0$$

---

解答例

[1] $y_1$, $y_2$ は与えられた微分方程の解なので

$$y_1'-ty_1=t$$
$$y_2'-ty_2=t$$

を満たす。両辺の差をとり

$$y_1'-y_2'-t(y_1-y_2)=0$$
$$(y_1-y_2)'-t(y_1-y_2)=0$$

よって $y=y_1-y_2$ は

$$y'-ty=0$$

を満たす。

[2] (1) 特解 $y$ を次のように置く

$$y=at^3+bt^2+ct+d$$

$a\sim d$ は定数。

この y が $y'-y=t^3$ を満たすので

$$3at^2+2bt+c-at^3-bt^2-ct-d=t^3$$
$$-at^3+(3a-b)t^2+(2b-c)t+c-d=t^3$$

恒等式として連立方程式を立てると

$$-a=1,\quad 3a-b=0,\quad 2b-c=0,\quad c-d=0$$

これを解いて

$$a=-1,\quad b=-3,\quad c=-6,\quad d=-6$$

を得るので，求める特解は

$$y=-t^3-3t^2-6t-6$$

斉次方程式の一般解は $ce^t$ (cは定数)
であるから，求める一般解は次で与えられる。

$$y=-t^3-3t^2-6t-6+ce^t$$
(cは定数)

(2) 特解を 次のように置く。

$$y=a\cos t+b\sin t$$

これが与えられた微分方程式を満たすので，

$$(a\cos t+b\sin t)'+2(a\cos t+b\sin t)=\sin t$$
$$-a\sin t+b\cos t+2a\cos t+2b\sin t=\sin t$$
$$(2b-a)\sin t+(b+2a)\cos t=\sin t$$
$$2b-a=1,\quad b+2a=0$$

$a=2b-1$ を $b+2a=0$ に代入

$$b+2(2b-1)=0$$
$$5b=2 \quad b=\frac{2}{5},\quad a=-\frac{1}{5}$$

よって $-\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t$ が特解
斉次方程式の一般解は $ce^{-2t}$
(cは定数) なので求める一般解は

$$y=-\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t+ce^{-2t}$$
(cは定数)

[3] 特解を $y=at^2+bt+c$ とおくと

$$y'-3y=t^2+1$$
$$2at+b-3(at^2+bt+c)=t^2+1$$
$$-3at^2+(2a-3b)t+(b-3c)=t^2+1$$
$$-3a=1,\quad 2a-3b=0,\quad b-3c=1$$
$$a=-\frac{1}{3},\quad b=-\frac{2}{9},\quad c=-\frac{11}{27}$$
$$y=-\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{9}t-\frac{11}{27}$$

対応する斉次方程式の一般解は 定数 C を用いて

$$Ce^{3t}$$

と表される。 従って求める一般解は次で与えられる。

$$y=-\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{9}t-\frac{11}{27}+Ce^{3t} \text{ (Cは定数)}$$

$t=0$ で $y=0$ より $C=\frac{11}{27}$ よって

$$y=-\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{9}t-\frac{11}{27}+\frac{11}{27}e^{3t}$$