

微分方程式 演習解答例 6月3日

2020 度前期 微分方程式 演習 20.06.03 学籍番号

氏名

[1] 次の微分方程式の特性方程式および、特性方程式の解を求めよ。

- (1) $y'' - 6y' + 9y = 0$ (2) $y'' + 2y' + 2y = 0$
 (3) $y'' - 4y' - 32y = 0$ (4) $y'' + y = 0$
 (5) $y'' + y' = 0$

[2] 1~(5)の微分方程式の一般解を求めよ。

[3] [2](1)~(3)で求めた一般解が、それぞれの方程式を満たすことを確かめよ。

[1]	特性方程式	解
(1)	$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$	3 (重解)
(2)	$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$	$-1 \pm i$
(3)	$\lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0$	8, -4
(4)	$\lambda^2 + 1 = 0$	$\pm i$
(5)	$\lambda^2 + \lambda = 0$	0, -1

[2] (1) $C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ (C_1, C_2 は定数)

(2) $C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$ (:)

(3) $C_1 e^{8x} + C_2 e^{-4x}$ (:)

(4) $C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (:)

(5) $C_1 + C_2 e^{-x}$ (:)

[3] (1)~(3)で C_1, C_2 は任意の定数とする

(1) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ とおく

$$y' = 3C_1 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x} + C_2 e^{3x}$$

$$y'' = 9C_1 e^{3x} + 9C_2 x e^{3x} + 6C_2 e^{3x}$$

$$y'' - 6y' + 9y = (9C_1 + 6C_2 - 18C_1 - 6C_2 + 9C_1) e^{3x} + (9C_2 - 18C_2 + 9C_2) e^{3x} = 0$$

(2) $y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$ と置く

$$y' = -C_1 e^{-x} \cos x - C_1 e^{-x} \sin x$$

$$- C_2 e^{-x} \sin x + C_2 e^{-x} \cos x$$

$$= (C_2 - C_1) e^{-x} \cos x - (C_1 + C_2) e^{-x} \sin x$$

$$y'' = (-C_1 - C_2 - C_2 + C_1) e^{-x} \cos x$$

$$- (C_2 - C_1 - C_1 - C_2) e^{-x} \sin x$$

$$= -2C_2 e^{-x} \cos x + 2C_1 e^{-x} \sin x$$

$$y'' + 2y' + 2y$$

$$= (-2C_2 + 2C_2 - 2C_1 + 2C_1) e^{-x} \cos x$$

$$+ (2C_1 - 2C_1 - 2C_2 + 2C_2) e^{-x} \sin x = 0$$

(3) $y = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-4x}$ と置く。

$$y' = 8C_1 e^{8x} - 4C_2 e^{-4x}$$

$$y'' = 64C_1 e^{8x} + 16C_2 e^{-4x}$$

$$y'' - 4y' - 32y$$

$$= (64 - 32 - 32)C_1 e^{8x} + (16 + 16 - 32)C_2 e^{-4x}$$

$$= 0$$