

微分方程式演習解答例 6月10日

2020 度前期 微分方程式 演習 20.06.10 学籍番号

氏名

[1] 次の微分方程式の基本解系を一組ずつ求めよ。

- (1) $y'' + 2y' + y = 0$
- (2) $y'' - 6y' + 10y = 0$
- (3) $y'' + 3y' - 10y = 0$

[2] [1] (1)~(3) の基本解系 y_1, y_2 に対して, x が 0 及び 1 の時の行列 $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ の行列式を計算して, 0 でないことを確認せよ。

[3] [1] (1) の基本解系 y_1, y_2 に対して, 任意の実数 a, b, c に対して $y(a)=b, y'(a)=c$ を満たすものを定めることができることを示せ。

[1] (1) 特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ は重解 -1 を持つので
 $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ が基本解系

(2) 特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ は $3 \pm i$ を解とするので
 (複素解)
 $\{e^{3x} \cos x, e^{3x} \sin x\}$ が基本解系

(3) 特性方程式 $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$ は 2 実解 $2, -5$ を持つので,
 $\{e^{2x}, e^{-5x}\}$ が基本解系

[2]
 (1)
$$\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-2x} - xe^{-2x} + xe^{-2x}$$

$$= e^{-2x}$$

$$= \begin{cases} 1 & (x=0) \\ e^{-2} & (x=1) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} e^{3x} \cos x & e^{3x} \sin x \\ e^{3x} (3 \cos x - \sin x) & e^{3x} (3 \sin x + \cos x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{6x} (3 \sin x \cos x + \cos^2 x) - e^{6x} (3 \sin x \cos x - \sin^2 x)$$

$$= e^{6x} = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ e^6 & (x=1) \end{cases}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-5x} \\ 2e^{2x} & -5e^{-5x} \end{vmatrix}$$

$$= -7e^{-3x}$$

$$= \begin{cases} -7 & (x=0) \\ -7e^{-3} & (x=1) \end{cases}$$

[3] $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$
 とおき, c_1, c_2 を求める。

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

となる。 $x = a$ のとき
 $y = b, y' = c$ とおけば

$$\begin{pmatrix} e^{-a} & a e^{-a} \\ -e^{-a} & e^{-a} - a e^{-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$
 とおき解いて

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-2a}} \begin{pmatrix} e^{-a} - a e^{-a} & -a e^{-a} \\ e^{-a} & e^{-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (e^a - a e^a) b - a e^a c \\ e^a b + e^a c \end{pmatrix}$$

$$y = e^a ((1-a)b - ac) e^{-x} + e^a (b + c) x e^{-x}$$