微分方程式演習 解答例 6月17日

2020 度前期 微分方程式 演習 20.06.17 学籍番号 氏名

[1] 定数 α, β ($\alpha \neq \beta$) に対して，
関数 $C_1(x), C_2(x)$ が 次の等式を満たせば，

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1{}'(x) \\ C_2{}'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

$y=C_1(x)e^{\alpha x}+C_2(x)e^{\beta x}$ は

$$y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=r(x)$$

の解になることを示せ。

[2] [1] の場合の(定数変化法を用いた), 2 階線形微分方程式の解の公式を導け。

[3] 上の方法を用いて $y''+3y'+2y=e^x$ の一般解を求めよ。

---

[1] この微分方程式の特性方程式

$$\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta=0$$

は 2実解 α, β を持つので $\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$ は基本解系である。与えられた非斉次の微分方程式の解を

$$y=C_1(x)e^{\alpha x}+C_2(x)e^{\beta x}$$

と置く。この $C_1(x)$，$C_2(x)$ が

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

を満すとする。

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{\alpha x}+C_2'(x)e^{\beta x}=0 & \cdots ① \\ \alpha C_1'(x)e^{\alpha x}+\beta C_2'(x)e^{\beta x}=r(x) & \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y' &= \alpha C_1(x)e^{\alpha x}+\beta C_2(x)e^{\beta x} \\ &\quad + C_1'(x)e^{\alpha x}+C_2'(x)e^{\beta x} \quad ①より \\ &= \alpha C_1(x)e^{\alpha x}+\beta C_2(x)e^{\beta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \alpha^2 C_1(x)e^{\alpha x}+\alpha C_1'(x)e^{\alpha x} \\ &\quad +\beta^2 C_2(x)e^{\beta x}+\beta C_2'(x)e^{\beta x} \quad ②より \\ &= \alpha^2 C_1(x)e^{\alpha x}+\beta^2 C_2(x)e^{\beta x}+r(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y \\ &= \alpha^2 C_1(x)e^{\alpha x}+\beta^2 C_2(x)e^{\beta x}+r(x) \\ &\quad -(\alpha+\beta)(\alpha C_1(x)e^{\alpha x}+\beta C_2(x)e^{\beta x}) \\ &\quad +\alpha\beta(C_1(x)e^{\alpha x}+C_2(x)e^{\beta x}) \\ &= (\alpha^2-(\alpha+\beta)\alpha+\alpha\beta)e^{\alpha x} \\ &\quad +(\beta^2-(\alpha+\beta)\beta+\alpha\beta)e^{\beta x}+r(x) \\ &= r(x) \end{aligned}$$

[2]
$$\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

を満せばよいので

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha}e^{-(\alpha+\beta)x}\begin{pmatrix} \beta e^{\beta x} & -e^{\beta x} \\ -\alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-\beta}e^{-\alpha x}r(x) \\ \frac{1}{\beta-\alpha}e^{-\beta x}r(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$C_1(x)=\frac{1}{\alpha-\beta}\int e^{-\alpha x}r(x)dx,\quad C_2(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int e^{-\beta x}r(x)dx$$

$C_1(x), C_2(x)$ それぞれの積分定数を明記して

$$y=C_1(x)e^{\alpha x}+C_2(x)e^{\beta x}+K_1e^{\alpha x}+K_2e^{\beta x}$$

K_1, K_2 は定数

[3] 対応する特性方程式 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ は $-1, -2$ を解とするので，

$$C_1=\frac{1}{1}\int e^{x}e^{x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+K_1$$

$$C_2=\frac{1}{-1}\int e^{+2x}e^{x}dx=\frac{-1}{3}e^{3x}+K_2$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}e^{2x}e^{-x}-\frac{1}{3}e^{3x}e^{-2x}+K_1e^{-x}+K_2e^{-2x} \\ &= \frac{1}{6}e^{x}+K_1e^{-x}+K_2e^{-2x} \end{aligned}$$

<検算>

$K_1=K_2=0$ のとき.

$$\begin{aligned} y''+3y'+2y &= \frac{1}{6}(e^x+3e^x+2e^x) \\ &= e^x \end{aligned}$$

となり，$\frac{1}{6}e^x$ は特解になっている。