微分方程式演習解答例 6月24日

2020度前期 微分方程式 演習 20.06.24　学籍番号　　　　　　　　氏名

[1] 次の微分方程式の一般解を未定係数法を用いて求めよ。

$$y''+2y'-3y=e^x$$

[2] 次の微分方程式の一般解を未定係数法を用いて求めよ。

$$y''+2y'+5y=\cos 2x$$

[3] 次の微分方程式の一般解を未定係数法を用いて求めよ。

$$y''+4y=\sin 2x$$

---

[1] 特性方程式 $\lambda^2+2\lambda-3=0$ は 2実解 $-3,+1$ を持つので(未定係数Cを用いて) $y=Cxe^x$ と置く.

(右辺の指数が特性方程式の重解でない解と一致している場合)

$y''+2y'-3y=e^x$ を満すので

$$\begin{cases} y'=Ce^x+Cxe^x \\ y''=2Ce^x+Cxe^x \end{cases}$$ より

$$2Ce^x+Cxe^x+2(Ce^x+Cxe^x)-3Cxe^x=e^x$$

$$4Ce^x=e^x \qquad C=\frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4}xe^x$ が特解.

斉次方程式の一般解は

$K_1e^x+K_2e^{-3x}$ (K_1,K_2 は定数)

より

$$\frac{1}{4}xe^x+K_1e^x+K_2e^{-3x}$$

が一般解となる。

[2] 特性方程式の解は $-1\pm 2i$ なので対応する斉次方程式の一般解は

$$K_1e^{-x}\cos 2x+K_2e^{-x}\sin 2x$$

となる。特解を(未定係数 a,b を用いて)

$$y=a\cos 2x+b\sin 2x$$

と置くと, $y''+2y'+5y=\cos 2x$ を満すので

$$-4a\cos 2x-4b\sin 2x+2(-2a\sin 2x+2b\cos 2x)+5(a\cos 2x+b\sin 2x)=\cos 2x$$

$$(a+4b)\cos 2x+(b-4a)\sin 2x=\cos 2x$$

$$a+4b=1,\ b-4a=0,\ a=\frac{1}{17}, b=\frac{4}{17}$$

$\frac{1}{17}(\cos 2x+4\sin 2x)$ が特解となる。

従って

$$\frac{1}{17}(\cos 2x+4\sin 2x)+K_1e^{-x}\cos 2x+K_2e^{-x}\sin 2x$$

(K_1,K_2 は定数)

が一般解となる。

[3] 特性方程式 ($\lambda^2+4=0$) が $\pm 2i$ という解を持つので

$K_1\cos 2x+K_2\sin 2x$ (K_1,K_2 は定数)

が斉次方程式の一般解。

特解を(未定係数 a,b を用いて)

$$y=ax\cos 2x+bx\sin 2x$$

と置くと $y''+4y=\cos 2x$ を満すので

$$y'=a\cos 2x+b\sin 2x-2ax\sin 2x+2bx\cos 2x$$

$$y''=-2a\sin 2x+2b\cos 2x-2a\sin 2x+2b\cos 2x-4ax\cos 2x-4bx\sin 2x$$

より

$$-4a\sin 2x+4b\cos 2x-4ax\cos 2x-4bx\sin 2x+4ax\cos 2x+4bx\sin 2x=\sin 2x$$

$$-4a\sin 2x+4b\cos 2x=\sin 2x$$

$$a=-\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{-1}{4}x\cos 2x$$

が特解。よって求める一般解は

$$-\frac{1}{4}x\cos 2x+K_1\cos 2x+K_2\sin 2x$$

K_1,K_2 は定数.