

7月1日演習 解答例

2020 度前期 微分方程式 演習 20.07.01 学籍番号

氏名

[1] 次の微分方程式の一般解を未定係数法を用いて求めよ。

$$y'' - 8y' + 25y = e^{2x} \quad (1)$$

[2] 微分方程式 (1) に対して $y(0)=1, y'(0)=2$ を満たす解を求めよ。

[3] 微分方程式 $y'' + 4y = \sin x$ は $y = \frac{1}{3}\sin x$ を特解として持つ。このとき

(1) 境界条件 $y(0)=0, y(\pi)=0$ を満たす解を求めよ。

(2) 境界条件 $y(0)=0, y(\frac{\pi}{3})=0$ を満たす解を求めよ。

[1] 特性方程式 $\lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0$ は
非実数解 $4 \pm 3i$ を持つので (2 は
解ではない) $y = Ce^{2x}$ とおくと

$$y'' - 8y' + 25y = 4Ce^{2x} - 16Ce^{2x} + 25Ce^{2x} = e^{2x}$$

$$13Ce^{2x} = e^{2x}, \quad C = \frac{1}{13}$$

よって求める一般解は

$$\frac{1}{13}e^{2x} + K_1e^{4x}\cos 3x + K_2e^{4x}\sin 3x$$

(K_1, K_2 は定数)

[2] $y(0)=1, y'(0)=2$ より

$$\frac{1}{13} + K_1 = 1, \quad \frac{1}{13} + 3K_2 = 2$$

$$K_1 = \frac{12}{13}, \quad K_2 = \frac{11}{39}$$

$$y = \frac{1}{13}e^{2x} + \frac{12}{13}e^{4x}\cos 3x + \frac{11}{39}e^{4x}\sin 3x$$

が求める解となる

[3] 特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ は
 $\pm 2i$ (非実数解) を解とする。

$\frac{1}{3}\sin x$ が特解であるので

$$y = \frac{1}{3}\sin x + K_1\cos 2x + K_2\sin 2x$$

(K_1, K_2 は定数)

が一般解となる

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} y(0) &= K_1 = 0 \\ y(\pi) &= K_1 = 0 \end{aligned} \right\} \text{より } K_1 = 0$$

$$y = \frac{1}{3}\sin x + K_2\sin 2x \quad (K_2 \text{ は定数})$$

が解となる (無限にある)

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} y(0) &= K_1 = 0 \\ y(\frac{\pi}{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{6} + K_1(-\frac{1}{2}) + K_2(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$K_1 = 0, \quad K_2 = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$$

が解となる。

”