dea200708

2020 度前期 微分方程式 演習 20.07.08 学籍番号 　　　　　　　　氏名

**[1]** 次の微分方程式の一般解を，定係数の微分方程式に帰着させた上で求めよ。($x>0$ の範囲)

$$x^2y''(x)-4xy'(x)+4y(x)=0$$

[2] 次の微分方程式の初期値問題に対して解が存在するかどうか，定係数の微分方程式に帰着させた上で答えよ。

$$x^2y''(x)-4xy'(x)+4y(x)=0,$$
$$y(0)=1,\quad y'(0)=2$$

[3] 次の微分方程式の一般解を，定係数の微分方程式に帰着させた上で求めよ。

$$x^2y''(x)-4xy'(x)+4y(x)=x^2$$

[1] $x=e^t$, $Y(t)=y(e^t)$ と置く

$Y'(t)=e^ty'(e^t)=xy'(x)$

$Y''(t)=e^ty'(e^t)+e^{2t}y''(e^t)$

$=xy'(x)+x^2y''(x)$

$x^2y''-4xy'+4y=0$

$\Leftrightarrow$ $x^2y''+xy'-5xy'+4y=0$

$\Leftrightarrow$ $Y''-5Y'+4Y=0$

特性方程式 $\lambda^2-5\lambda+4=0$ は

異なる2つの実数解 1, 4 を持つので

$Y=C_1e^t+C_2e^{4t}$ ($C_1, C_2$ は定数)

が一般解 $x=e^t$ より

$y=C_1x+C_2x^4$

[2] [1] より

$x=e^t$ の変数変換を用いると

$Y(t)=C_1e^t+C_2e^{4t}$, ($C_1, C_2$ は定数

が一般解となるが，$e^t=0$ とすることはできない。

$x$ の式における一般解は

$y=C_1x+C_2x^4$ ($C_1, C_2$ は定数) となるが

$y(0)=1$ はあり得ない ($y(0)=0$)

[3] $x=e^t$ と置くと $Y(t)=y(e^t)$ に対して

$Y'(t)=e^ty(e^t)=xy'$

$Y''(t)=e^ty(e^t)+e^{2t}y''(e^t)=xy'+x^2y''$

$x^2y''-4xy'+4y=x^2$ より

$Y''-5Y'+4Y=e^{2t}$

特性方程式 $\lambda^2-5\lambda+4=0$ は 1, 4 を解とするので $C_1e^t+C_2e^{4t}$ が斉次方程式の一般解。特解を $ae^{2t}$ と置くと

$4ae^{2t}-10ae^{2t}+4ae^{2t}=e^{2t}$

$-2ae^{2t}=e^{2t}$

$a=-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}e^{2t}$ が特解

$-\frac{1}{2}e^{2t}+C_1e^t+C_2e^{4t}$

$=-\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2x^4$ ($C_1\ C_2$ は定数)

が一般解