

[1] 次の微分方程式と同等の連立微分方程式を作れ。

(1) $y'' + y' - 2y = \sin x$

(2) $y'' - 2y' + 3y = x^2$

[2] 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$$

[3] [2] の連立微分方程式の初期値問題

$x(0)=1, y(0)=0$ を解け。

[1] (1) $y_1 = y, y_2 = y'$ と置く

$y_1' = y_2, y_2' = y_1 - y_2 + \sin x$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 + \sin x \end{cases}, \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

(2) $y_1 = y, y_2 = y' (= y_1')$

$y'' = 2y_1' - 3y_2 + x^2$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -3y_1 + 2y_2 + x^2 \end{cases}, \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

[2] 第一式より $y = x' - x$, 第二式に
代入して

$x'' - x' = 3x - x' + x^2$

$x'' - 4x = 0$ 特性方程式の解は ± 2

$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$, C_1, C_2 は定数

が x の一般解。①に代入して

$$\begin{aligned} y = x' - x &= 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} \\ &\quad - C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t} \\ &= C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \\ C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

[3] $x(0)=1, y(0)=0$ より

$C_1 + C_2 = 1, C_1 - 3C_2 = 0$

$C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{1}{4}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix}$$