dea200722

2020 度前期 微分方程式 演習 20.07.22　学籍番号　　　　　　　　　氏名

[1] 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，に対して，$3,-1$ が固有値，それぞれ $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ が対応する固有ベクトルである。このとき実数 t に対して e^{tA} を求めよ。

[2] [1] で求めた行列 e^{tA} に対して，

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=A\,e^{tA}$$

が成り立つことを示せ。ただし行列やベクトルの値をとる関数の微分は各成分を微分したものとする。

[3] [1] で求めた行列 e^{tA} に対して，

$$e^{tA}e^{-tA}=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。

[1]　$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$e^{tA}=P\begin{pmatrix}e^{3t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{3t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{3t} & e^{3t}\\ e^{-t} & -e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t}\\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t}\end{pmatrix}$$

[2]

$$(e^{tA})'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3e^{3t}-e^{-t} & 3e^{3t}+e^{-t}\\ 3e^{3t}+e^{-t} & 3e^{3t}-e^{-t}\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

$$A\,e^{tA}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t}\\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3e^{3t}-e^{-t} & 3e^{3t}+e^{-t}\\ 3e^{3t}+e^{-t} & 3e^{3t}-e^{-t}\end{pmatrix}\cdots②$$

$$① = ② \quad (e^{tA}=A\,e^{tA})$$

[3]

$$e^{tA}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t}\\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$e^{-tA}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-3t}+e^{+t} & e^{-3t}-e^{+t}\\ e^{-3t}-e^{+t} & e^{-3t}+e^{+t}\end{pmatrix}$$

$$e^{tA}e^{-tA}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t}\\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-3t}+e^{+t} & e^{-3t}-e^{+t}\\ e^{-3t}-e^{+t} & e^{-3t}+e^{+t}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+e^{-4t}+e^{4t}+1+1-e^{4t}-e^{-4t}+1, & 1+e^{-4t}-e^{4t}-1+1-e^{-4t}+e^{4t}-1\\ 1-e^{-4t}+e^{4t}-1+1-e^{4t}+e^{-4t}-1, & 1-e^{-4t}-e^{4t}+1+1+e^{-4t}+e^{4t}+1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$