dea200729

2020 度前期 微分方程式 演習　20.07.29　学籍番号　　　　　　　　氏名

[1]　$f(x)=e^{x}$ の $x=0$ におけるテイラー級数(マクローリン展開)が任意の x で絶対収束することを示せ。

[2]　$f(x)=e^{-x}$ は任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ で解析的であることを示せ。

[3]　$f''(x)+4f(x)=0$ のべき級数解を求めよ。

[1]　e^{x} のマクローリン展開は

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{k} \quad \cdots ①$$

である。$K=[2x]+1$ とおくと

$k\geq K$ のとき

$$k! = K!(K+1)\times\cdots\times k$$
$$\geq K!(K+1)^{k-K} = \frac{K!}{(K+1)^{K}}(K+1)^{k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{k}}{k!} = \sum_{k=0}^{K}\frac{|x|^{k}}{k!} + \sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{k!}|x|^{k}$$
$$\leq \sum_{k=0}^{K}\frac{|x|^{k}}{k!} + \sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{(K+1)^{K}}{K!}\left(\frac{|x|}{K+1}\right)^{k}$$
$$= \sum_{k=0}^{K}\frac{|x|^{k}}{k!} + \frac{(K+1)^{K}}{K!}\left|\frac{x}{K+1}\right|^{K+1}\frac{1}{1-\frac{|x|}{K+1}}$$
$$< \infty$$

[2]　$$e^{-x} = e^{-(x-a)-a}$$
$$= e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}(x-a)^{k}$$

よって任意の a において解析的である。

※ e^{x} のテイラー展開 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}$ は全ての x で収束している。
よって $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x-a)^{k}$ $(=e^{(x-a)})$ も収束している。
[1] と同様にして絶対収束することも分かる。

[3]　$f = \sum_{k=0}^{\infty}C_{k}x^{k}$ とおく

$$f'' = \sum_{k=2}^{\infty}C_{k}\,k(k-1)C_{k}x^{k-2}$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}C_{l+2}(l+1)(l+2)x^{l}$$

$f''=-4f$ より

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+2}(k+1)(k+2)x^{k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-4)C_{k}x^{k}$$

$$C_{k+2} = -4\frac{C_{k}}{(k+1)(k+2)},\quad C_{2} = -4\times\frac{1}{2}C_{0},\ C_{4}=\frac{16}{24}C_{0}$$
$$C_{3} = -4\times\frac{C_{1}}{6},\ C_{5} = 16\frac{C_{1}}{120},\ \cdots$$
$$C_{2j} = (-4)^{j}\frac{1}{(2j)!}C_{0}$$
$$C_{2j+1} = (-4)^{j}\frac{1}{(2j+1)!}C_{1}$$

偶数番目は $\cos 4x$ の 奇数番目は $\sin 4x$ の (定数倍) のテイラー展開

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_{k}x^{k} = C_{0}\cos 4x + C_{1}\sin 4x$$

C_{0}, C_{1} は定数