5月13日1階定係数線形微分方程式

2020年4月22日　　10:01

次のような微分方程式を考える。

$$y' + ay = r(t) \qquad ①$$

ここに $y(t)$ は微分可能な関数で，t を変数とするものとします。 変数は状況に応じて t をつかったり x を使ったりしますので，臨機応変に考えてください。
a は定数で r は 関数です。 このような微分方程式を定係数の1階微分方程式といいます。
特に r が 0 の場合を，斉次方程式と呼びます 。 この授業で扱う微分方程式は 斉次方程式の場合の解を基本とします。 この場合少し形を変えて

$$y' = -ay \qquad ②$$

となりますので，指数関数 $y = e^{-at}$ が解になることが分かります。実際,

$$y' = (e^{-at})' = -ae^{-at} = -ay$$

ですから，解(方程式を満たす関数)であることが分かります。
②の式の両辺に e^{at} をかけると

$$y'e^{at} = -aye^{at} \quad , \quad y'e^{at} + aye^{at} = 0$$

となりますが，これは

$$(ye^{at})' = 0$$

ということになりますので(この式を積の微分の項式で展開すると前の式となる)
ye^{at} は定数であることが分かります。 この定数を Cと置くと

$$y = Ce^{-at} \qquad ③$$

という解が得られ，この解しかないこともわかります。定数Cは何でもよいので，定数の分自由度がある一般解が得られます。 この 一般解 という言葉は大事です。

例えば $y + y' = 0 \ (y = -y')$ であれば，一般解は
$y = Ce^{-t}$, (Cは定数) ということになります。

次に右辺がある場合を考えます。

$$y + y' = e^x$$

という微分方程式を考えます。右辺が x の関数になりましたので，流通変数(関数の変数として用いる記号)は x としましょう。 この授業ではおもに t か x を用いますが，一般には何でもいいことになります。 両辺に e^x をかけて (③ で a = 1 となってます。この場合はたまたま右辺と同じ関数になっていますが，右辺の関数をかけるわけではありません)

$$ye^x + y'e^x = e^{2x}$$

$$(ye^x)' = e^{2x} \quad , \quad ye^x = \int e^{2x}dx \left(= \tfrac{1}{2}e^{2x} + C\right)$$

$$y = e^{-x}\int e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}e^x + \underset{\uparrow \text{積分定数}}{C}e^{-x} \quad (\text{Cは定数})$$

となります。 一般的には ①の形の微分方程式に対して次のような解を得ることができます。

$$y = e^{-at}\int e^{at} r(t)\, dt + Ce^{-at}$$

となります。 一般的には ①の形の微分方程式に対して次のような解を得ることができます。

$$y = e^{-at}\int e^{at} r(t)\, dt + Ce^{-at}$$

これは，公式として覚えておいていい式ですので，出題された問題に対しては，この式から(具体的にr や a に関数や数値が入ったものから)計算を始めればよいです。
　演習問題では，微分方程式の解がこれで定まることの説明を求めていますが，これについては ※ あたりをまとめてください。

このような微分方程式は，定数 C が定まれば，完全に関数を決めることができます。 決めるための条件として初期値(t や x を時刻と考えて 開始時刻 0 における値) を与えることで，解を定めることができます。 例えば

$$f'(x) + f(x) = e^{x}, \quad f(0) = 3$$

という微分方程式の初期値問題を考えます。 0 での値を決めている以外は，前の問題と同じなのですが，関数として f が使われていたり，省略されていた変数 x が関数のところに書かれていたりします。 これについては同じ状況だということも，把握してください。
　先ほどと同様にして一般解は

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{x} + Ce^{-x} \quad (C\text{は定数})$$

$$f(0) = \frac{1}{2} + C = 3 \text{，より } C = \frac{5}{2}$$

$$\text{よって}\quad f(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{5}{2}e^{-x}$$

となります。 これで今回の授業内容は終わりです。課題の問題を解いて提出してください。