5月20日 一階微分方程式

1階の線形微分方程式

$$y' + a(t)y = r(t)$$

これを満たす解が一つ見つかったとします。 それを y_1 と置きます。 これとは別に解 y_2 があるとするとき, $y_1 - y_2$ は斉次方程式

$$y' + a(t)y = 0$$

を満たしています。

$$y_1' - y_2' = (y_1 - y_2)'$$
$$a(t)y_1 - a(t)y_2 = a(t)(y_1 - y_2)$$

が成り立ちますので $y = y_1 - y_2$ として

$$\begin{array}{rl} & y_1' + a(t)y_1 = r(t) \\ -) & y_2' + a(t)y_2 = r(t) \\ \hline & (y_1 - y_2)' + a(t)(y_1 - y_2) = 0 \end{array}$$

$$y' + a(t)y = 0$$

となります。特殊な場合を練習問題としていますので，解いてみてください。
これでわかったことは，一般に斉次方程式でない方程式の解が一つ見つかり，あと対応する斉次方程式(右辺を0としたもの)の一般解が見つかれば，初めの微分方程式は

特解 + 斉次方程式の一般解

という形であらわすことができます。 特解とは一つの解のことを表します。
a(t) が定数の場合は，斉次方程式の一般解は容易に分かりますので，あとはなんでもいいから一つ解を見つけることができれば，その解に斉次方程式の一般解を加えることで解を求めることができます。 前回の方法で，積分を使った方法もあるのですが，一般に複雑な計算を必要とすることもあり，今回の未定係数法もよく用いられます。

次のような例を考えてみます

(1) $y' + y = e^{2x}$

(2) $y' + y = \sin x$

(3) $y' + y = x^2$

いずれも，対応する斉次方程式は同じで

Ke^{-x} (Kは定数)

が一般解となります。 あとはこれに特解を加えれば，それぞれの一般解が得られますので，
1つずつ見つけていきましょう

(1) $y = ae^{2x}$ と置いてみます。 この方程式を満たしているとすると

$$2ae^{2x} + ae^{2x} = e^{2x}$$
$$3ae^{2x} = e^{2x}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$y = \frac{1}{3}e^{2x}$ が特解

斉次方程式の一般解と合わせて $\frac{1}{3}e^{2x} + ke^{-x}$ （kは定数）という一般解を得ます。

(2) $y = a\cos x + b\sin x$ と置いてみます。

$$-a\sin x + b\cos x + a\cos x + b\sin x = \sin x$$

$$(b-a)\sin x + (b+a)\cos x = \sin x$$

$$b - a = 1, \quad b + a = 0, \quad a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + ke^{-x}$$

kは定数

が求める一般解になります。

(3) $y = ax^2 + bx + c$ と置くと

$$2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2$$

$$ax^2 + (2a+b)x + c + b = x^2$$

恒等式の係数比較で

$$a = 1, \quad 2a + b = 0, \quad c + b = 0$$

$$b = -2, \quad c = 2$$

$x^2 - 2x + 2$ が特解.

$y = x^2 - 2x + 2 + ke^{-x}$ （kは定数）

このようにして，未知の定数をいくつかおいて，恒等式を解くことで，特解を求めることができます。 特解を求めるための 未知数付きの関数の与え方の代表的なものを挙げておきます。

右辺がn 次式　⇒　n 次式 （未知数が n+1 個）

$e^{\alpha x}$ { $e^{\alpha x}$ が斉次方程式の解 $\Rightarrow axe^{\alpha x}$ （a(ひとつ)が未定係数）

　　　　：　の解でない $\Rightarrow ae^{\alpha x}$　　：

$\sin\beta x, \cos\beta x$ の定数倍の和 $\Rightarrow a\cos\beta x + b\sin\beta x$

一般解が求められれば，初期条件がある時に一つの定数が決まるところは前回と同じで，

例えば (1) の場合に y(0)=1 という条件があれば

$$y(0) = \left.\frac{1}{3}e^{2x} + ke^{-x}\right|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{3} + k = 1, \quad k = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x}$$

により，解を求めることができます。