特殊な微分方程式

変数分離形

$y' = P(y) f(x)$ の形の微分方程式を変数分離形という。｜

$\frac{1}{P(y)} y' = f(x)$ の両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{P(y)} dy = \int f(x)\, dx \quad \left(\int \frac{y'(x)}{P(y(x))} dx = \int \frac{1}{P(y)} dy \right)$$

これを整理して解を得る。(左辺は変数を y として積分の公式を用いる)

例

$$y' = x(y^2 - 1)$$

$$\int \frac{1}{y^2-1} dy = \int x\, dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} dy = \int x\, dx$$

$$\frac{1}{2} \log\left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\log\left| \frac{y-1}{y+1} \right| = (x^2 + 2C)$$

$$\frac{y-1}{y+1} = \pm e^{2C} e^{x^2}$$

$$= C_1 e^{x^2}$$

$$y(1 - C_1 e^{x^2}) = 1 + C_1 e^{x^2}$$

$$y = \frac{1 + C_1 e^{x^2}}{1 - C_1 e^{x^2}}$$

同次系

$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ の形の微分方程式を同次形という

$u = \frac{y}{x}$ とおくと

$$y = xu, \quad y' = u + xu'$$

$$u + xu' = g(u)$$

$$u' = \frac{1}{x}(g(u) - u)$$

となり変数分離形に帰着できる

例 $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$u = \frac{y}{x}$ とおくと $y = xu$

$y' = u + xu'$

$u + xu' = \frac{2u}{1+u^2}$

$xu' = \frac{u-u^3}{1+u^2}$

$\frac{u^2+1}{u^3-u} u' = -\frac{1}{x}$

$\int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u}\right) du = -\int \frac{1}{x} dx$

$\log\left|\frac{(u-1)(u+1)}{u}\right| = -\log|x| + C$

$\log\left|\frac{(y-x)(y+x)}{xy}\right| = -\log|x| + C$

$\log\left|\frac{(y-x)(y+x)}{y}\right| = C$

$(y-x)(y+x) = C'y \quad (C' = \pm e^C)$

$y^2 - x^2 = C'y$

ベルヌーイ型

$y' + P(x)y = q(x)y^n$

両辺に $(1-n)y^{-n}$ をかけて

$u = y^{1-n}$ に関する一階線形微分方程式に帰着

※定係数のものに帰着されないと必ずしも楽には解けない。

(例) $y' + y = y^3 \cos x$

$u = y^{-2}$ とおく $n = 3$ $u' = -2y^{-3}y'$

$-2y^{-3}y' - 2y^{-2} = \cos x$

$u' - 2u = \cos x$

$u = a\cos x + b\sin x$ (未定係数法) とおく

$u' - 2u = \cos x$

$-a\sin x + b\cos x - 2a\cos x - 2b\sin x = \cos x$

$(b - 2a)\cos x - (a + 2b)\sin x = \cos x$

$a + 2b = 0, \quad b - 2a = 1$

$a = -2b$ を第2式に代入して

$b + 2(2b) = 1, \quad b = \frac{1}{5}$

$a = -\frac{2}{5}$ $u = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$

が特解. $u = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + Ce^{2x}$

が一般解 (C は定数)

$$y^{-2} = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + Ce^{2x}$$

$$y = \frac{\pm 1}{\sqrt{-\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + Ce^{2x}}}$$