定係数2階線形斉次方程式

定係数の2階線形微分方程式は

$$y''+ay'+by=r(x)$$

の形で与えられる。 ここに，a,b は実数で， y,r は x を変数とする関数である。
特に r(x)= 0 の場合を，斉次方程式という。
この定係数2階線形微分方程式に対して

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

を対応する特性方程式と呼ぶ。この特性方程式の解のタイプによって，斉次方程式の一般解の形が定まる。
(微分をするという命令と 実数倍するという命令が組み合わさって
左辺の式が出来上がっていると考えると，この意味で因数分解が
できれば方程式を単純化できると考えられる。)
この 特性方程式の解に対して以下の3通りに分けて考える
(２実解) 2つの実数解 α とβ がある。
(重解)　 1つの実数解 α がある。
(非実数解) 複素解 α ± βi がある。（β ≠0)
この3つのパターンで対応する斉次方程式

$$y''+ay'+b=0$$

は次のような一般解を持つ。
(２実解) α, β が解のとき

$$c_1e^{\alpha x}+c_2e^{\beta x}, \quad c_1, c_2 \text{ は定数}$$

(重解)　α が重解のとき

$$c_1e^{\alpha x}+c_2xe^{\alpha x}, \quad 〃$$

(非実数解) $\alpha\pm\beta i$ が解のとき

$$c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x \quad 〃$$

いくつか例を見てみます。
(1)　$y''+y'-2y=0$ の特性方程式とその解は

$$\lambda^2+\lambda-2=0 \qquad \lambda=1, -2 \quad (2\text{実解})$$

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x} \quad c_1, c_2 \text{ は定数}$$

が与えられた斉次方程式の一般解。

$$\begin{aligned} & y''+y'-2y \\ &= c_1e^{x}+4c_2e^{-2x}+(c_1e^{x}-2c_2e^{-2x})-2(c_1e^{x}+c_2e^{-2x}) \\ &= (c_1+c_1-2c_1)e^{x}+(4c_2-2c_2-2c_2)e^{-2x}=0 \end{aligned}$$

となり，解であることが確認された。

(2) $y''-4y'+4y=0$ の特性方程式とその解は

$$\lambda^2-4\lambda+4=0,\quad \lambda=2\ (\text{重解})$$ よって

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x},\ (C_1, C_2 \text{は定数})$$

が与えられた斉次方程式の一般解。（検算…。）

$$y'=2C_1e^{2x}+C_2e^{2x}+2C_2xe^{2x}$$

$$y''=4C_1e^{2x}+2C_2e^{2x}+2C_2e^{2x}+4C_2xe^{2x}$$
$$=4C_1e^{2x}+4C_2e^{2x}+4C_2xe^{2x}$$

$$\begin{aligned}
&y''-4y'+4y\\
&=4C_1e^{2x}+4C_2e^{2x}+4C_2xe^{2x}\\
&\quad-4(2C_1e^{2x}+C_2e^{2x}+2C_2xe^{2x})\\
&\quad+4(C_1e^{2x}+C_2xe^{2x})\\
&=(4C_1-8C_1+4C_1)e^{2x}+(4C_2-4C_2)e^{2x}\\
&\quad+(4C_2-8C_2+4C_2)xe^{2x}=0
\end{aligned}$$

(3) $y''-2y'+2y=0$ の特性方程式とその解は

$$\lambda^2-2\lambda+2=0,\quad \lambda=1\pm i$$ よって

$$y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x,\ (C_1, C_2 \text{は定数})$$

が与えられた斉次方程式の一般解。 検算….

$$\begin{aligned}
y'&=C_1e^x\cos x-C_1e^x\sin x\\
&\quad+C_2e^x\sin x+C_2e^x\cos x\\
&=(C_1+C_2)e^x\cos x+(C_2-C_1)e^x\sin x
\end{aligned}$$

$$y''=2C_2e^x\cos x-2C_1e^x\sin x$$

$$\begin{aligned}
&y''-2y'+2y\\
&=2C_2e^x\cos x-2C_1e^x\sin x\\
&\quad-2((C_1+C_2)e^x\cos x+(C_2-C_1)e^x\sin x)\\
&\quad+2(C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x)\\
&=(2C_2-2C_1-2C_2+2C_1)e^x\cos x\\
&\quad+(-2C_1-2C_2+2C_1+2C_2)e^x\sin x=0
\end{aligned}$$