基本解 系

定係数2階線形斉次方程式

$$y'' + a y' + b y = 0 \qquad ①$$

を考えます。 この方程式は特性方程式の解のタイプから，3種類の一般解のパターンがあることを学びました。この方程式の一般解は，特性方程式　　　　　の解に対して次のようになります。

2つの異なる実数解 α, β がある場合： $C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$

1つの重解α がある場合　　$C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$

非実数解 $\alpha \pm \beta i$ がある場合　　$C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$

いずれの場合も，基本となる関数が2つあって，それらの定数倍の和(線形結合といいます)で表されていました。今回はこの2つの関数について扱います。

2実解 α，βがある場合　$\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$

1つの重解α がある場合　$\{e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}\}$

非実数解 $\alpha \pm \beta i$ がある場合 $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

を基本解系といいます。

一般に ① の解 y_1，y_2 に対して

$$W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}, \quad |W| = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

をそれぞれ 「ロンスキー行列」,「ロンスキー行列式」(ロンスキアン)と呼びます。

$$u = |W| = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

と置くと,

$$u' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1' y_2' - y_2 y_1''$$
$$= y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \quad \cdots ②$$

共に ① の解であるので.

$$② = y_1(-a y_2' - b y_2) - y_2(-a y_1' - b y_1)$$
$$= -a(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -a u$$

$u' = -a u$ の一般解は

$$u = C e^{-ax} \quad (C\text{は定数})$$

で与えられます。

これで得られた結果により C がそれぞれ 正，負，ゼロ の場合に， u もそれぞれ
常に 正，負，ゼロとなりますので，u は常に正, 常に負, 常に0のいずれかしかないことが分かったことになります。 ここで u が行列式であることを考え直すと W はどんな x でも逆行列

を持つ，またはどんな x でも逆行列を持たない，のどちらかであることになります。
　ここで，行列及び行列式のことを少し説明しておきます。

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ はベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

に移す写像,変換とみなされます。 この意味で逆行列

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},\quad |A|=ad-bc \text{ は行列式}$$

は，逆写像,逆変換 に対応しますが，行列式が分母にありますので，行列式が0でないときにしか定めることができません。 実際行列式が0の場合は 1対1の対応になりませんので，逆写像は設定できません。 見方を変えると，行列式が 0 でない場合は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \text{（連立方程式）}$$

がただ一つ解を持ち，その解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dp-bq \\ -cp+aq \end{pmatrix}$$

で与えられます。 行列式が0の時は解がないか，無限にあるかという状況になります。
上の三つ解のタイプの場合のロンスキー行列, ロンスキアンを見てみると

2実解 α，βがある場合 $W=\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{pmatrix}$, $|W|=(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)x}$

$\neq 0 \quad (\alpha\neq\beta)$

1つの重解α がある場合 $W=\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x}+\alpha x e^{\alpha x} \end{pmatrix}$, $|W|=e^{2\alpha x}>0$

非実数解 α ± β i がある場合

$$W=\begin{pmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{pmatrix},$$

$$|W|=\beta e^{2\alpha x}\neq 0 \quad (\beta\neq 0)$$

となるので，基本解系 y_1, y_2 に対して，ある x_0 における条件

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = p \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = q \end{cases}$$

を満たす C_1, C_2 を求めることができることになります。　見方を変えると，斉次の定係数2階線形微分方程式に対して，基本 解系の線形結合(定数倍して足したもの)の形で，一般解を得た場合，基本解系からつくるロンスキー行列が逆行列を持つことから，(上に与えた方法で基本解系を作った場合必ず逆行列がすべての x で存在する。)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

として

$$y(x_0) = p \ , \ y'(x_0) = q$$

を満たす解を(対応する C_1, C_2 を求めることで)求めることができることになります。

具体的な方程式に対して，ロンスキー行列を見ていきましょう

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

は，対応する特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$ が非実数の解 $-2 \pm 2i$ となるので

$$e^{-2x}\cos 2x \ , \ e^{-2x}\sin 2x$$

が基本解系になります。 一般解は

$$y = C_1 e^{-2x}\cos 2x + C_2 e^{-2x}\sin 2x$$

で与えられます。 初期値問題

$$y(0) = 1 \quad , \ y'(0) = 2$$

を考えると

$$C_1 e^{-2\times 0}\cos 2\times 0 + C_2 e^{-2\times 0}\sin 2\times 0 = 1$$

$$-2C_1 e^{-2\times 0}\cos 2\times 0 - 2C_1 e^{-2\times 0}\sin 2\times 0$$
$$-2C_2 e^{-2\times 0}\sin 2\times 0 + 2C_2 e^{-2\times 0}\cos 2\times 0 = 2$$

$$C_1 = 1 \ , -2C_1 + 2C_2 = 2$$

$$C_2 = 1 - C_1 = 2$$

よって $y = e^{-2x}\cos 2x + 2e^{-2x}\sin 2x$

という解を得ます。 関数値および 導関数の値をどこかの x で(上の場合 x=0で) 与えたら，必ずこれを満たす解が一つだけ定まることになります。