6/17 定数変化法

定係数 2階 線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = r(x)$$

を考えます。 r(x) =0 の場合を 斉次方程式といい，特性方程式の解のタイプによって一般解を得ることができます。 基本解系 $y_1(x), y_2(x)$に対して

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad C_1, C_2 \text{ は定数}$$

の形で与えられます。基本解系は 特性方程式 $\lambda^2 - a\lambda + b = 0$ の解ごとに次で与えることができます。

実数解 $\alpha, \beta \ (\alpha \neq \beta)$を持つ $\Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}, \ y_2 = e^{\beta x}$

重解 α を持つ $\Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}, \ y_2 = xe^{\alpha x}$

非実数解 $\alpha \pm \beta i \ (\beta \neq 0)$を持つ $\Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

非斉次方程式の場合に,C_1, C_2 を関数にすることで特解を求める方法を考えます。
(定数変化法といいます。)

一般論を説明しますので，演習では状況に合わせた説明をしてください。
まず (1) の解をロンスキアンが0でない，基本解系$\{y_1, y_2\}$を用いて

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

これが，(1) を満たすので

$$y'' + ay' + by = r(x)$$

y_1, y_2 は斉次方程式の解なので

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$$

$$(C_1y_1 + C_2y_2)' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2 \quad \cdots(2)$$

$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \ {}_{*1}$ を満すとすると

$$(2) = C_1y_1' + C_2y_2' \quad \cdots(2)'$$

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'' \quad \cdots(3)$$

$C_1'y_1' + C_2'y_2' = r(x) \ {}_{*2}$ を満すとすると

$$(3) = r(x) + C_1y_1'' + C_2y_2'' \quad \cdots(3)'$$

(2)′, (3)′ より

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= r(x) + C_1y_1'' + C_2y_2'' + a(C_1y_1' + C_2y_2') \\ &\quad + b(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= r(x) + C_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2(y_2'' + ay_2' + by_2) \\ &= r(x) \end{aligned}$$

結論にたどり着いたような感じになりましたが，＊1 と＊2 の仮定を満たせばという条件付きです。 逆に言うと *1 と *2 を満たすように定めれば解になるということでもあります。
これらをまとめると

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$
$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = r(x),$$

$W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ はロンスキー行列

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = W^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1y_2'-y_2y_1'}\begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{y_1y_2'-y_2y_1'}\begin{pmatrix} -y_2 r(x) \\ y_1 r(x) \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \int \frac{-y_2 r(x)}{y_1y_2'-y_2y_1'}\,dx, \quad C_2 = \int \frac{y_1 r(x)}{y_1y_2'-y_2y_1'}\,dx$$

演習問題では，特性方程式が異なる実数解 α，β の場合を示すことになりますので，重解の場合を見てみましょう。 基本解系は $\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}\}$ となります。C_1, C_2 が

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \alpha xe^{\alpha x}+e^{\alpha x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad (r(x) = x^2 \text{ の場合})$$

を満たすのであれば,

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$$

は $y'' + ay' + by = x^2$ を満たす解になります。 このときの a,b は特性方程式が重解 α なので, $a = -2\alpha$, $b = \alpha^2$ となっていることになります。

ロンスキー行列の逆行列は

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \alpha xe^{\alpha x}+e^{\alpha x} \end{pmatrix}^{-1} = e^{-2\alpha x}\begin{pmatrix} \alpha xe^{\alpha x}+e^{\alpha x} & -xe^{\alpha x} \\ -\alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha xe^{-\alpha x}+e^{-\alpha x} & -xe^{-\alpha x} \\ -\alpha e^{-\alpha x} & e^{-\alpha x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^3e^{-\alpha x} \\ x^2e^{-\alpha x} \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \int -x^3 e^{-\alpha x}dx = \left(\frac{1}{\alpha}x^3 + \frac{3}{\alpha^2}x^2 + \frac{6}{\alpha^3}x + \frac{6}{\alpha^4}\right)e^{-\alpha x} + K_1$$

$$C_2 = \int x^2 e^{-\alpha x}dx = \left(-\frac{1}{\alpha}x^2e^{-\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}2xe^{-\alpha x} - \frac{2}{\alpha^3}e^{-\alpha x}\right) + K_2$$

K_1, K_2 は定数

$$y = C_1e^{\alpha x} + C_2 xe^{\alpha x} = \left(\frac{1}{\alpha^2}x^2 + \frac{4x}{\alpha^3} + \frac{6}{\alpha^4}\right) + K_1e^{\alpha x} + K_2xe^{\alpha x}$$

(検算) $K_1 = K_2 = 0$ のとき

$$y'' + ay' + by = y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y$$
$$= \frac{2}{\alpha^2} - 2\alpha\left(\frac{2}{\alpha^2}x + \frac{4}{\alpha^3}\right) + \alpha^2\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^3}x + \frac{6}{\alpha^4}\right)$$
$$= x^2$$