6月24日 2階微分方程式未定係数法

先日，1階微分用定式の特解を得るために未定係数法という手法をやりましたが，今回はそれの2階微分方程式版です。出てくる言葉を整理していきます。 まず対象となる微分方程式は

$$y'' + ay' + by = r(x)$$

の形で表される定係数の2階線形微分方程式で，非斉次方程式です。 この場合の一般解は，

特解+斉次方程式の一般解

という形です。(2つの解の差が斉次方程式の解になることは，1階の場合と同じ。)
特解を(ひとつ)見つければ一般解が得られるということにはなっています。

未定係数法における特解の求め方は，右辺の形によって異なります。右辺に来る関数ごとの未定係数をふくむ特解の定め方を列挙します。

r(x)	特性方程式の解	特解の形	未定係数
n次式	——	n次式	$n+1$個の係数
$e^{\alpha x}$	αが解でない	$ce^{\alpha x}$	c (1つ)
:	αが解(重解でない)	$cxe^{\alpha x}$	:
:	αが重解	$cx^2e^{\alpha x}$	:
$e^{\alpha x}\cos\beta x$	$\alpha\pm\beta i$が解でない	$c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$	c_1, c_2 (2つ)
$e^{\alpha x}\sin\beta x$	$\alpha\pm\beta i$が解	$c_1xe^{\alpha x}\cos\beta x + c_2xe^{\alpha x}\sin\beta x$	:

未定係数法における特解の作り方
(1) 特性方程式の解を求める(右辺が多項式の場合不要)
(2) 右辺の形と特性方程式の解をもとに 特解の形と未定係数を決める
(3) 元の微分方程式に代入して，恒等式を作る。(未定係数の連立方程式となる)
(4) 恒等式を解いて未定係数を得る。(未定係数を代入して特解とする。)
(5) 右辺が複数の項の和である時はそれぞれの特解を足し合わせる

例1 $$y'' + y' - 2y = x + e^{x} + e^{-x} \qquad ①$$

右辺が異なる3つのタイプなので，3回にわけて特解を見つける。(最終的に足し合わせる)
まずは1次式 $y_1 = ax + b$ が $y'' + y' - 2y = x$ の解であるとき，

$$y_1'' + y_1' - 2y_1 = x \Rightarrow a - 2(ax+b) = x \Rightarrow -2a = 1,\ a - 2b = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{4} \Rightarrow y_1 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

続いて($\alpha = 1$ は特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ の重解でない解なので) $y_2 = c_1xe^{x}$ が $y'' + y' - 2y = e^{x}$ の解のとき

$$y_2'' + y_2' - 2y_1 = e^{x} \Rightarrow 2c_1e^{x} + c_1xe^{x} + c_1e^{x} + c_1xe^{x} - 2c_1xe^{x} = e^{x}$$

$$\Rightarrow 3c_1e^{x} = e^{x} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}xe^{x} \text{ が特解}$$

最後に $y_3 = c_2e^{-x}$ が $y'' + y' - 2y = e^{-x}$ の解のとき

$$c_2e^{-x} - c_2e^{-x} - 2c_2e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow -2c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_3 = -\frac{1}{2}e^{-x} \text{ が特解}$$

これらを合わせて $-\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}xe^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$ が①の特解．

対応する斉次方程式の一般解は $K_1 e^{x} + K_2 e^{-2x}$ （K_1, K_2 は定数）

よって求める一般解は

$$-\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} x e^{x} - \frac{1}{2} e^{-x} + K_1 e^{x} + K_2 e^{-2x}, \quad (K_1, K_2 \text{ は定数})$$

例２　$y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sin x + \cos x$　②

これも２つに分けて考えます。（$e^{x}\sin x + e^{x}\cos x$ ならば一つで済みます。）

$y_1 = C_1 x e^{x}\cos x + C_2 x e^{x}\sin x$ が $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sin x$ の解であれば,

$$y_1' = C_1 e^{x}\cos x + C_2 e^{x}\sin x + (C_1 + C_2) x e^{x}\cos x + (C_2 - C_1) x e^{x}\sin x$$

$$y_1'' = 2(C_1 + C_2) e^{x}\cos x + 2(C_2 - C_1) e^{x}\sin x + 2C_2 x e^{x}\cos x - 2C_1 x e^{x}\sin x$$

$y_1'' - 2y_1' + 2y_1 = e^{x}\sin x$ より

$$2C_2 e^{x}\cos x - 2C_1 e^{x}\sin x + (2C_2 - 2(C_1 + C_2) + 2C_1) x e^{x}\cos x$$
$$+ (-2C_1 - 2(C_2 - C_1) + 2C_2) x e^{x}\sin x = e^{x}\sin x$$

$$2C_2 e^{x}\cos x - 2C_1 e^{x}\sin x = e^{x}\sin x$$

$C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = 0$, $y_1 = -\frac{1}{2} x e^{x}\cos x$ が特解

続いて $y_2 = C_1\cos x + C_2\sin x$ が $y'' - 2y' + 2y = \cos x$ の解であれば

$y_2' = -C_1\sin x + C_2\cos x$, $y_2'' = -C_1\cos x - C_2\sin x$

$y_2'' - 2y_2' + 2y = \cos x$

$(-C_1 - 2C_2 + 2C_1)\cos x + (-C_2 + 2C_1 + 2C_2)\sin x = \cos x$

$C_1 - 2C_2 = 1$, $2C_1 - C_2 = 0$

$C_1 = -\frac{1}{3}$　$C_2 = -\frac{2}{3}$　$y_2 = -\frac{1}{3}\cos x - \frac{2}{3}\sin x$ が特解

対応する斉次方程式の一般解と合わせて次が②の一般解となる。

$$y = -\frac{1}{2} x e^{x}\cos x - \frac{1}{3}\cos x - \frac{2}{3}\sin x + K_1 e^{x}\cos x + K_2 e^{x}\sin x$$

K_1, K_2 は定数