7月1日 初期値問題, 境界値問題

2階の線形微分方程式に対して，初期値問題(ある変数(例えば0)における関数の値と導関数の値を与えることで解を決定する)と境界値問題 (区間の両端での値を決定することで解を決定する)といった問題を考えます。定係数の場合は，初期値問題に一意的な解があることを以前扱いましたが，境界値問題に関しては解があるとは限りません。 その状況を見てみましょう。

まずは初期値問題として次の状況を考えます。
対象となる微分方程式は,

$$y'' + a y' + b y = r(x)$$

この方程式に対して, 初期値問題として与えられる条件は

$$y(x_0) = p \quad , \quad y'(x_0) = q$$

一般論としては，特解 $y_0(x)$と斉次方程式の基本解系$\{y_1(x), y_2(x)\}$を用いて，2つの任意定数 K_1, K_2 を含む解

$$y = y_0 + K_1 y_1 + K_2 y_2$$

の形で一般解(任意の解)が表現されます。 これに対して K_1, K_2 を定めることができれば，解が特定されたことになります。

$$y_0(x_0) + K_1 y_1(x_0) + K_2 y_2(x_0) = p$$
$$y_0'(x_0) + K_1 y_1'(x_0) + K_2 y_2'(x_0) = q$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - y_0(x_0) \\ q - y_0'(x_0) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p - y_0(x_0) \\ q - y_0'(x_0) \end{pmatrix}$$

上で用いた行列はロンスキー行列で，基本解系を用いて作ったロンスキー行列は
必ず逆行列を持つことを以前に説明しました。 このようにして，解を決めることができます。
具体的な場合を見ていきましょう。
例は一つのパターンしか扱いませんので，特性方程式の解のタイプごとの基本解系(一般解)や
右辺の関数のタイプごとの，特解の求め方については，以前の資料を参考にしてください。

例: $y'' + y' - 2y = e^x$ ①, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ ② (初期値問題)
まずは，斉次方程式の特性方程式の解を見て，未定係数法を用いた特解を求めましょう。
特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ の解は 1,-2 ですので 未定係数を含んだ特解は

$$y = c\,x e^x \quad (c\text{は定数})$$

となります。これが ① をみたすので

$$c(xe^x + 2e^x) + c(xe^x + e^x) - 2cxe^x = e^x$$

よって,

$$3c\,e^x = e^x, \quad c = \frac{1}{3}$$

となり，特解は次のようになります。

$$y_0 = \frac{1}{3} x e^x$$

特性方程式の解のタイプから与えられた微分方程式の一般解は

$$y=\frac{1}{3}xe^{x}+k_1e^{x}+k_2e^{-2x} \ , \quad k_1, k_2 \text{ は定数} \qquad ③$$

で与えられます。 これが初期条件 ② をみたすので，これに代入して次の式を得ます。

$$\begin{aligned} 0 + k_1 + k_2 &= 2 \\ \frac{1}{3} + k_1 - 2k_2 &= 1 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{14}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

よって，この初期値問題の解は次のようになります。

$$y=\frac{1}{3}xe^{x}+\frac{14}{9}e^{x}+\frac{4}{9}e^{-2x}$$

今度は同じ方程式で境界値問題を考えてみます。 境界値とは定義域の境界(端点)で値がどうなるかということですので， x の動く範囲を $[x_0, x_1]$ とすると，

$$y(x_0)=p \ , \quad y(x_1)=q$$

の形で条件が与えられます。 例えば [0,1] で $y(0)=1$ ，$y(1)=3$ という条件が与えられれば，① の微分方程式だとすると

$$\left(\begin{aligned} 0 + k_1 + k_2 &= 1 \\ \frac{e}{3} + ek_1 + e^{-2}k_2 &= 3 \end{aligned} \right. \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3-\frac{e}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & e^{-2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3-\frac{e}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{e^{-2}-e}\begin{pmatrix} e^{-2} & -1 \\ -e & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3-\frac{e}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{e^{-2}-e}\begin{pmatrix} e^{-2}-3+\frac{e}{3} \\ \underbrace{-e+3-\frac{e}{3}}_{3-\frac{4}{3}e} \end{pmatrix}$$

$$y=\frac{1}{3}xe^{x}+\frac{e^{-2}-3-\frac{e}{3}}{e^{-2}-e}e^{x}+\frac{3-\frac{4}{3}e}{e^{-2}-e}e^{-2x}$$

この場合は行列が逆行列を持ったので良かったのですが，状況によっては逆行列がない場合もあります。

$$y''+y=0 \ ③ \quad y(0)=1 \ , \ y(\pi)=2 \ ④$$

③ の一般解は $k_1\cos x+k_2\sin x$ （k_1, k_2 は定数）

となるが ④ に代入すると

$$k_1=1 \qquad -k_1=2 \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

となり解が無いことが分かる。

$$y(0)=1 \ , \quad y(\pi)=-1$$

という条件であれば

$$y=\cos x+k_2\sin x \quad (k_2 \text{ は定数})$$

となり無限に解があることになる。