7月8日コーシーの微分方程式

次のような微分方程式をコーシーの微分方程式といいます。

$$x^2y'' + axy' + by = r(x) \quad a, b \text{は定数} \quad ①$$

このような方程式は、線形ではありますが係数が定数ではありませんので，そのままでは解くことができませんが，うまく変形することで，定係数の線形微分方程式に帰着させることができます。
次のような変形を考えます。

$$x = e^t \quad (t = \log x)\ (x > 0)$$

x は t の関数なので

$$Y(t) = y(x(t)) = y(e^t)$$

$$\Rightarrow Y'(t) = y'(x(t))x'(t) = y' \times e^t \quad (= xy')$$

$$Y''(t) = (e^t y')'$$

$$= e^t y' + e^{2t} y''$$

$$(= xy' + x^2 y'')$$

$$xy' = Y' \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx} \right.$$

$$x^2y'' = Y'' - xy' \qquad \left. Y' = \frac{dY}{dt} \right)$$

$$= Y'' - Y'$$

$$x^2y'' + axy' + by = r(x) \quad a, b \text{は定数}$$

$$Y'' - Y' + aY' + bY = R(t) \quad : R(t) = r(e^t)$$

$$Y'' + (a-1)Y' + bY = R(t)$$

このようにｔを変数とする関数に対する定係数2階線形微分方程式に帰着されました。
これで特解を求めることができれば，特性方程式の解を用いた斉次方程式の一般解と合わせて一般解を得ることができます。 例を見てみましょう。

例 コーシーの微分方程式

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = x^2 \quad ①$$

$x = e^t$ と置いて

$Y(t) = y(e^t)$ とすると

$$Y'(t) = e^t y'(e^t) \ (= xy')$$

$$Y''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$$

$$(= xy' + x^2y'')$$

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = x^2$$

$$Y''(t) - 3Y'(t) - 4Y(t) = e^{2t} \quad \cdots\cdots ②$$

特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ が実数解 $4, -1$ を持つので

斉次方程式の一般解は $k_1 e^{4t} + k_2 e^{-t}$ (k_1, k_2 は定数)

特解を ce^{2t} と置くと（②に代入して）

$$4ce^{2t}-6ce^{2t}-4ce^{2t}=e^{2t}$$

$c=-\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{6}e^{2t}$ が②の特解

$$Y(t)=-\frac{1}{6}e^{2t}+K_1e^{4t}+K_2e^{-t} \quad (K_1, K_2 \text{は定数})$$

$$y=-\frac{1}{6}x^2+K_1x^4+K_2x^{-1} \quad (\quad \text{〃} \quad)$$

が①の一般解となる。

初期値問題:

コーシーの微分方程式に対する初期値問題を考えるとき，変数変換でしすうかんすうをもちいているので，x=0 の初期値問題では答えがないことがあります。ただし，正の値（ x=1 など）における初期値問題であれば，答えを定めることができます。

まずはx=1の場合の例を見てみます。上の例において

$$y(1)=0 \quad , \quad y'(1)=1$$

の初期値問題を考えます。 一般解

$$y=-\frac{1}{6}x^2+K_1x^4+K_2x^{-1}$$

に代入して連立方程式

$$-\frac{1}{6}+K_1+K_2=0 \quad , \quad -\frac{1}{3}+4K_1-K_2=1$$

を得ますので，これを解いて次の解を得ます。

$$K_1=\frac{3}{10} \ , K_2=-\frac{2}{15} \quad , \quad y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{10}x^4-\frac{2}{15}x^{-1}$$

x=0の場合を考えます。

同じ微分方程式に対して 初期値問題

$$y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=2$$

を考えると，x=0での値を考えることができるためには

$$y(x)=-\frac{1}{6}x^2+K_1x^4+K_2x^{-1}$$

に0を代入できるように，$K_2=0$ である必要がある。 このとき

$$y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=-\frac{1}{3}x+4K_1x^3\Big|_{x=0}=0$$

となるので，y(0)=1, y'(0)=2 ということはあり得ず，答えがないことになります。

初期値問題が y(0)=0，y'(0)=0 であれば 答えは(無限にたくさん)あることになりますので，解を持たないとは限らないのですが，一般的に 0 での条件は考えにくいということになります。