7月15日 連立微分方程式

つぎのような，連立微分方程式を考えます。

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) + b\,y(t) + r_1(t) \\ y'(t) = c\,x(t) + d\,y(t) + r_2(t), \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \text{は定数}$$

ここでは x, y はいずれも t を変数とする関数ですが，必要に応じて流通変数を何とするか，どれが関数になるかといったことは変わりますので，柔軟に考えてください。

$b \neq 0$ の場合に第一式を使って次のように y を x の式で表します。

$$y = \frac{1}{b}x' - \frac{a}{b}x - \frac{r_1}{b}, \quad y' = \frac{1}{b}x'' - \frac{a}{b}x' - \frac{r_1'}{b}$$

第二式に代入すると

$$\frac{1}{b}x'' - \frac{a}{b}x' - \frac{r_1'}{b} = cx + d\left(\frac{1}{b}x' - \frac{a}{b}x - \frac{r_1}{b}\right) + r_2$$

$$x'' - ax' - dx' + adx - bcx - r_1' + dr_1 - br_2 = 0$$

$$x'' - (a+d)x' + (ad-bc)x = r_1' - dr_1 + br_2$$

このように x に関する定係数の2階線形微分方程式になります。 x に対して2つの任意定数を含む一般解が得られれば 第1式より， y は定まりますので，連立微分方程式の解としては，全体で2つの任意定数を含む解となります。c≠0 であれば y に関する微分方程式に帰着され，y についても2階線形微分方程式に帰着されます.

まとめるとこの形の連立微分方程式は，2階の線形微分方程式に帰着させることにより2つの任意定数を含む一般解を得ることができることになります。 例を見てみましょう。

例 $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) & \cdots ① \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) & \cdots ② \end{cases}$

① より

$$y(t) = x'(t) - x(t) \quad \cdots ③$$

$$y'(t) = x''(t) - x'(t)$$

② に代入して

$$x''(t) - x'(t) = 2x(t) + (x'(t) - x(t))$$

$$x''(t) - 2x'(t) - x(t) = 0$$

特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ は2つの実数解 $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ を持つので,

$x = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$ （C_1, C_2 は定数）が xの一般解となる。 ③ をもちいて

$$y = x'(t) - x(t) = C_1(1+\sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2(1-\sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})t} - C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} - C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$$

$$= \sqrt{2}C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} - \sqrt{2}C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2 \text{は定数})$$

今度は，2階の線形微分方程式が与えられて，そこから対応する連立微分方程式を作ることを考えます。

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad \cdots \quad ④$$

次のように y_1, y_2 を定めます。（ここでは x を変数とする関数が2つあると考えます）

$$y_1 = y \qquad y_2 = y' \qquad (\, y_1' = y_2 \,)$$

④ より

$$y'' = -ay' - by + r(x)$$

$$y_2' = -ay_2 - by_1 + r(x)$$

となります。これを整理して，次のような連立微分方程式を得ます。

$$\begin{aligned} y_1' &= 0\,y_1 + 1\,y_2 \\ y_2' &= -by_1 - ay_2 + r(x) \end{aligned} \,, \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

これにより，ここで扱う連立微分方程式は定係数2階線形微分方程式と同等の者だと考えることができます。

例 次の2階線形微分方程式から連立微分方程式を作ってみます。

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

$y_1 = y,\ y_2 = y'$ とおくと

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' (= y'' = 4y' - 4y + e^{2x}) = -4y_1 + 4y_2 + e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

（ $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{r}$ と見ることもできる）

連立微分方程式の初期値問題

ここで考える連立微分方程式は，2階の線形部分方程式に帰着させることで，任意定数を2つ含む基本解を得ることができます。（上の例では斉次方程式を扱いましたが非斉次でも，同様に考えることができます。）次のような設定で解を定めることができます。

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) + b\,y(t) + r_1(t) \\ y'(t) = c\,x(t) + d\,y(t) + r_2(t) \,, \\ x(t_0) = \alpha \,, \quad y(t_0) = \beta \end{cases}$$

この微分方程式の一般解は次のような形で与えることができます。

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix}}_{\text{特解}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}_{\text{斉次方程式の一般解}}$$

ここに(x_0, y_0) は (x, y) の一つの解(特解) で (x_1, y_1), (x_2, y_2)は斉次方程式 ($r_1 = r_2 = 0$ の場合) の一般解です。 第2項にある行列はロンスキー行列に相当するもので，2階の線形微分方程式の場合と同様，どの t に対しても逆行列を持つ(正則な)行列になります。 (詳細は教科書などで確認して下さい) 従って t を固定した条件

$$x(t_0) = \alpha,\ y(t_0) = \beta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ y_1(t_0) & y_2(t_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - x_0(t_0) \\ \beta - y_0(t_0) \end{pmatrix}$$

を満たす定数 C_1, C_2 は必ず一意に存在することが分かります。

例 最初に上げた例の初期値問題を考えてみましょう。

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t) & x(0) &= 1 \\ y'(t) &= 2x(t) + y(t) &, \quad y(0) &= 2 \end{aligned}$$

前に求めたように連立微分方程式の一般解は

$$x(t) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$$

$$y(t) = \sqrt{2}C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} - \sqrt{2}C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$$

t=0 での値を代入して連立方程式をたて，係数を求めると次のようになる。

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y(0) = \sqrt{2}C_1 - \sqrt{2}C_2 = 2$$

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2},\ C_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$x(t) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} e^{(1+\sqrt{2})t} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} e^{(1-\sqrt{2})t}$$

$$y(t) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} e^{(1+\sqrt{2})t} - \frac{\sqrt{2}-2}{2} e^{(1-\sqrt{2})t}$$

///