

7月22日 行列の指数関数

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して e^{tA} と

$$(e^{tA})' = A e^{tA}$$

を満たすように定めることができれば

$\vec{f} = e^{tA} \vec{v}$ は $\vec{f}' = A \vec{f}$ を満たす。このような e^{tA} を定める。

A に対して固有値 λ, μ と固有ベクトル $\vec{v}, \vec{w}$ ($\vec{v} \neq \vec{w}$) がある場合を考える。

$$A \vec{v} = \lambda \vec{v}, \quad A \vec{w} = \mu \vec{w}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} \text{ として } P = \begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \lambda \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \xrightarrow{P^{-1}} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \mu \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} \xrightarrow{P^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^2 = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = P \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$(e^{tA})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} A A^{k-1} = A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} A^l = A e^{tA}$$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ かつ

$A \vec{v} = 3 \vec{v}$, $A \vec{w} = -\vec{w}$ を満たす。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} \quad \checkmark \text{ 計算略}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$(e^{tA})' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{3t} - e^{-t} & 3e^{3t} + e^{-t} \\ 3e^{3t} + e^{-t} & 3e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A e^{tA} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{3t} - e^{-t} & 3e^{3t} + e^{-t} \\ 3e^{3t} + e^{-t} & 3e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{よって } (e^{tA})' = A e^{tA}$$

指数法則も成り立つので $e^{tA} e^{-tA} = e^0 = I$
 が成り立つはず。この例の場合に計算してみます。

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$e^{-tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^t & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} e^{-tA} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{tt} & e^{3t} - e^{tt} \\ e^{3t} - e^{tt} & e^{3t} + e^{tt} \end{pmatrix}$$

---- 計算略 ----

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$