7月29日 級数解法

実数 a と実変数 x (同じ実数ではあるが関数の変数とみている) , 実数列 $\{a_n\}$ を用いて

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad \cdots ①$$

の形で表される無限和を a を中心とするべき級数といいます。 べき級数には収束半径と呼ばれる量が定義されその収束半径 0≦R≦∞ に対して,

|x-a| < R ⇒ ① は絶対収束

|x-a| > R ⇒ $\{a_k(x-a)^k\}$ が有界でない。

であることが分かります。 大雑把に言って収束半径の内側では絶対収束，外側では収束しないということになっています。

三角関数や指数関数は全ての点で，このようなベキ級数の形に展開されることが知られています。一般に 関数 f が x=a を中心として

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad (\text{収束半径が}0\text{でない。})$$

と表わされるとき，f は x=a において解析的であるといいます。 指数関数や三角関数は任意の点で解析的であることが知られています。また有理関数も分母が0になっているところでなければ解析的です。

例: $f(x) = e^x$ のテイラー展開 法

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

は任意の x で絶対収束する。

証明： $K = [|2x|] + 1$

$$k \geq K \quad k! = 1 \times 2 \times \cdots \times (K-1) \times K \times (K+1) \times \cdots k$$

$$\geq K! \, K^{k-K}$$

$$\left| \frac{1}{k!} x^k \right| \leq \frac{1}{K!} \frac{|x|^k}{K^{k-K}} = \frac{K^K}{K!} \frac{|x|^k}{K^k}$$

$$\leq \frac{K^K}{K!} \left(\frac{|x|}{2|x|} \right)^k = \frac{K^K}{K!} \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!} + \frac{K^K}{K!} \sum_{k=K}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!} + \frac{K^K}{K!} \frac{1}{2^{K-1}} < \infty$$

///

例: $f(x)=e^{\alpha x}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ は任意の a で解析的。

$$e^{\alpha x}=e^{\alpha x-\alpha a+\alpha a}=e^{\alpha(x-a)}e^{\alpha a}$$
$$=e^{\alpha a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}(x-a)^k$$

$\left(e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right.$ (テイラー展開, 収束半径は$\infty$$\left.\right)$

例: $f(x)=\frac{1}{x}$ は $x=1$ において解析的。

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\frac{1}{1-(1-x)}=\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)^k \quad |x-1|<1$$

(無限等比級数)

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k \quad (\text{収束半径は } 1)$$

関数がべき級数で与えられているという前提の下で，微分方程式を考えると係数に関する無限の連立方程式が得られます。これを解くことで解が得られることもあります。

例: f''+f=0 という微分方程式を考えます。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \quad \cdots①$$

$$f''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_k x^{k-2}$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}(l+2)(l+1)a_{l+2}x^l \quad \cdots②$$

① = −② より

$$a_k=-(k+2)(k+1)a_{k+2}$$
$$a_{k+2}=\frac{-1}{(k+1)(k+2)}a_k \quad \cdots③$$

偶数番目同士，奇数番目同士が影響を与え合うことが分かります。

ここで，cos x と sin x のテイラー展開を考えてみます。 これらは共にマクローリン展開が無限和として収束半径∞のベキ級数になっています。

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

③を偶数番目に注目してみると 初項が a_0次が初稿に - 1 をかけて 1×2 で割る。

これを繰り返すと

$$a_{2j}-\frac{(-1)^j}{(2j)!}a_0$$

同様に奇数番目は

$$a_{2j+1}=\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}a_1$$

となり，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} x^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} x^{2j+1} \\
&= a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} + a_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} \\
&= a_0 \cos x + a_1 \sin x
\end{aligned}
$$

を得ます。 これは，特性方程式の解のタイプ(非実数解)を用いて求めた，斉次方程式の一般解と一致します。(基本解系がテイラー級数の形で出てきたことになっています。)」

注 テイラー級数はテイラー展開を級数としてとらえたもので，多くの場合に元の関数を近似します。ただし厳密には，テイラー級数の収束と，テイラー展開の近似とは異なり，テイラー展開が近似になっていることは剰余項が0に収束することで判断すべきことです。 ここで扱っているテイラー級数は元の関数を近似していることは，認めたうえで，ベキ級数としての収束のみを考えています。指数関数や三角関数はベキ級数としてのテイラー級数の収束半径が無限大になります。