単純な零点を持つ非加法的集合関数の零加法化

Null additvizations for monotone measures with simple null points.

○ [1] 芦刈右京, [1] 福田亮治
○ [1]Ukyo Ashikari, [1]Ryoji Fukuda
[1] 大分大学

Abstract: Null additivization for a finite non-additive measure space was defined using influence factors defined for null points. An influence factor is a minimal subset including some null points with non-zero Möbius transform. In this study, we consider the situation that there is only one influence factor for each null point. We call this situation the simple null point structure. Under this condition, for the null addtivization space, we can find out their simple structure by removing strong null points and regarding some atoms as corresponding single points.

1 はじめに

X を有限集合とし，μ を X 上の集合関数とする。集合関数は常に $\mu(\emptyset)=0$ を満たすものとする。従って単調性を仮定する単調測度は，常に非負の値をとる。単調測度に対する零加法化は 福田, 本田, 岡崎 ([1]) により試みられ，零点を除き影響要素を加えることで，関数に対する分布関数を変えない形で実現されている。しかし，この零加法化は一般には単調性を持たないことが例証されている。この研究の出発点は単調性をもつための十分条件を探すことにあった。その十分条件の候補として考えた，零点の単純性 (次節で定義する) は，非加法的測度空間における 強零集合やアトムの概念ともかかわりを持ち，[1] における零加法化も単純な構造を持つことが得られた。この報告では，これらについて概説する。

2 集合関数の零加法性

この報告を通して X を有限集合とし，μ は常に 2^X 上の集合関数を表すこととするが，集合関数は $\mu(\emptyset)=0$ を満たすものとする。μ が単調性 ($A\subset B \Rightarrow \mu(A)\le\mu(B)$) を満たすときには，単調測度もしくはファジィ測度と呼ばれている。

定義 1 零集合/零点, 強零集合/強零点

(a) $A\subset X$ が零集合であるとは，任意の $A'\subset A$ が $\mu(A')=0$ を満たすこととする。$\{x_0\}$ が零集合の時 x_0 を零点という。

(b) $A\subset X$ が強零集合であるとは，任意の $A'\subset A$ と $B\subset X$ に対して $\mu(A'\cup B)=\mu(B)$ が成り立つことをいう。$\{x_0\}$ が強零集合の時 x_0 を強零点という。

定義 2 零加法性/弱零加法性

(a) μ が零加法的であるとは，任意の零集合が強零集合であることとする。

(b) μ が弱零加法的であるとは，任意の 2 つの零集合和集合が零集合であることとする。

集合関数が単調性を持つ場合は次が成り立つ (通常これを定義とする)。

(a) μ が零加法的 $\Leftrightarrow$
$\mu(A)=0 \Rightarrow (\mu(A\cup B)=\mu(B)\ \forall B\subset X)$.

(b) μ が弱零加法的 $\Leftrightarrow$
$\mu(A)=\mu(B)=0 \Rightarrow \mu(A\cup B)=0$.

定義 3 メビウス変換
μ のメビウス変換 τ を次のように帰納的に定める。

$$\begin{array}{rcl} A\text{ が一点の場合} & : & \tau_A=\tau_a=\mu(\{a\}) \\ |A|>1\text{ の場合} & : & \tau_A=\mu(A)-\displaystyle\sum_{B\subsetneq A}\tau_B \end{array}$$

命題 1 零/弱零加法性の同値条件 ([1])

(a) μ 零加法的 $\Leftrightarrow (\mu(\{a\})=0\ \exists a\in A \Rightarrow \tau_A=0)$.

(b) μ 弱零加法的 $\Leftrightarrow (\mu(\{a\})=0\ \forall a\in A \Rightarrow \tau_A=0)$.

この同値条件は，単調測度の場合に与えられたものであるが，単調性のない場合は零集合や強零集合の定義を上の形で与える場合にやはりこの形で成り立つことがわかる。このことを考えても，単調性を持たない場合の零集合や強零集合の定義は上の形で与えた方が妥当だと考える。

3 分布関数，ショケ積分

この報告では，X 関数に対する性質をなるべく変えないように空間を変化させることを考える。 その場合次で定められる分布関数を変えないようにすることを目的とする。

定義 4 (分布関数)
f を X 上で定義される 非負値関数とするとき分布関数 $\rho_f(r)$ ($r\in[0,\infty)$) を次で定める。

$$\rho_f(r)=\mu(\{x : f(x)\ge r\}).$$

この分布関数を用いて関数 f のショケ積分は次のように定義される。

定義 5 (ショケ積分)
X 上で定義される 非負値関数 f に対して

$$\int^{Ch} f d\mu = \int_0^\infty \rho_f(r) dr.$$

により，f のショケ積分 $\int^{Ch} f d\mu$ を定める。

ショケ積分は 無限積分の形で与えられているが，この場合は X が有限集合なので，$\rho_f(r)$ が有界な台をもつ単関数になる。 従って上の無限積分は実際には有限和になっている。

メビウス変換を用いるとメビウス変換は次のように変形される。特に集合関数が非単調な場合はこの形を定義として扱った方が良いかもしれない。

命題 2 X 上で定義される 非負値関数 f のショケ積分は，メビウス変換 $\{\tau_B\}_{B\subset X}$ を用いて

$$\int^{Ch} f d\mu = \sum_{B\subset X} \min_{x\in B} f(x)\tau_B.$$

と表される。

4 影響要素を用いた零加法化

有限集合 X とその上の集合関数 μ を固定して考える。μ に関する零点全体を N で表すこととする。有限集合の場合は N が空集合であれば零加法的かつ弱零加法的である。また，零点が全て強零点であれば零加法的かつ弱零加法的である。従って，N の点をすべて取り除けば零加法的になるが，それでは f の分布関数が変化してしまう。それを補正するために次で定める影響要素を考える。

定義 6 $A \subset X$ が影響要素であるとは，次を満たす零点 $x_0 \in N$ が存在することとする。

(a) $x_0 \in A$
(b) $\tau_A \neq 0$
(c) $x_0 \in B \subsetneq A \Rightarrow \tau_B = 0$

影響要素はある零点に対して，それが他の要素に何らかの影響を与える場合の極小的な集合と見ることができる。一般には全ての零点に対して影響要素があるとは限らず，また一つの零点に複数の影響要素がある場合もある。以後，$\mathcal{A}$ で影響要素全体, N で零点全体を表すこととする。

影響要素に関連して次のような性質が成り立つ。

命題 3 X を有限集合，x_0 を μ に関する零点であるとするとき次が成り立つ。

(a) $x_0 \in A$ かつ $\tau_A \neq 0$ であれば $x_0 \in A' \subset A$ を満たす影響要素 A' が存在する。
(b) μ が単調測度の時，A が影響要素であれば $\tau_A > 0$ を満たす。

次の性質は零加法化した空間に適切な集合関数を設定するためのカギとなる性質である。

命題 4 **(a)** $\tau_B \neq 0$ であれば

$$B = (B \cap N^c) \cup \left(\bigcup_{C\in\mathcal{A}, C\subset B} C \right).$$

(b) $\tau_B \neq 0, \tau_{B'} \neq 0,\ B \neq B'$ であれば
$(B \cap N^c) \neq (B' \cap N^c)$ または
$\{C : C \in \mathcal{A}, C \subset B\} \neq \{C : C \in \mathcal{A}, C \subset B'\}$.

定義 7 $\widetilde{X} = (X \setminus N) \cup \mathcal{A}$ と定めこの空間にメビウス変換を次で与える.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A} &\Rightarrow \widetilde{\tau}_{\{A\}} = \tau_A, \\ B \subset X \setminus N &\Rightarrow \widetilde{\tau}_B = \tau_B. \end{aligned}$$

$B \in 2^X, U = \{C : C \subset B,\ C \in \mathcal{A}\}$ であるとき，

(a) $U = \{C\}, C = B$ のとき $\widetilde{\tau}_{(B\setminus N)\cup U} = 0$.

(b) (a) 以外では $\widetilde{\tau}_{(B\setminus N)\cup U} = \tau_B$.

これ以外の $U \subset \widetilde{X}$ に対しては $\widetilde{\tau}_U = 0$. このメビウス変換を用いて

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = \sum_{C\subset\widetilde{A}} \widetilde{\tau}(C)$$

により集合関数 $\widetilde{\mu}$ を定める。

このとき次の定理が成り立つ.

定理 8 上で定めた $\widetilde{\tau}$ に対して，対応する集合関数を $\widetilde{\mu}$ とする. X 上の非負関数 f に対して

$$\widetilde{f}(a) = \begin{cases} f(a) & \mathit{if}\ a \in X \setminus N \\ \min_{x\in a} f(x) & \mathit{if}\ a \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

により $\widetilde{X}$ 上の関数 $\widetilde{f}$ を定めるとき

$$\rho_f(r) = \rho_{\widetilde{f}}(r), \quad \forall r \geq 0.$$

特に

$$\int_X^{Ch} f d\mu = \int_{\widetilde{X}}^{Ch} \widetilde{f} d\widetilde{\mu}.$$

測度の表現に関しては，次のような性質が成り立つ。

定理 9 $(\widetilde{X}, \widetilde{\mu})$ を定理 で与えた零加法化とする。このとき任意の $\widetilde{X}$ の部分集合を

$$B \cup C \subset \widetilde{X}, \quad B \subset X \setminus N,\ C \subset \mathcal{A}.$$

と表すと，

$$\widetilde{\mu}(B \cup C) = \mu(B \cup \bigcup_{A \setminus N \subset B, A \in C} A) + \sum_{A \setminus N \not\subset B, A \in C} \tau_A$$

が成り立つ。

注意: 集合 $B \cup C$ が $I \setminus N \subset B,\ \forall I \in C$ を満たすものに限定すれば単調性を持つ。 $\{\widetilde{f} \geq r\}$ $(r \geq 0)$ はこの性質を持つ。

5 強零集合の除外とアトムの縮約

次の性質より強零集合は除外して考えてよいことになる。

命題 5 $N_0 \subset N$ を強零点全体とする。このとき任意の関数 $X \to \mathbb{R}^+$ に対して f_0 を f の $X \to \mathbb{R}^+$ への制限とするとき

$$\rho_f(r) = \rho_{f_0}(r) \quad \forall r \geq 0,$$
$$\int_X^{Ch} f d\mu = \int_{X \setminus N_0}^{Ch} f d\mu$$

が成り立つ。

アトムは可測性の段階で不可分な集合をさすことが多いが，集合関数の立場から定める試みが [2] 等でみられる。ここでの定義は [2] のものとは異なるが，集合関数 μ に依存した定義を与えている。

定義 10 $A \subset X$ が集合関数 μ に関してアトムであるとは

$$B \subset X, B \cap A \neq \emptyset,\ B^c \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

を満たすこととする。

$\{\tau_B\}_{B \subset X}$ を μ のメビウス変換とするとき，アトムは次のように特徴づけることができる。

命題 6 $A \subset X$ が集合関数 μ に関してアトムであることと次が同値になる。

$$B \subset X, B \cap A \neq \emptyset,\ B^c \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \tau_B = 0.$$

次の定理により，分布関数を用いて関数を解析する場合アトムは 1 点と見てよいと考えられる。

定理 11 A がアトムであるとき $X_1 = X \setminus A \cup \{A\}$ とアトムを *1* 点と考えることにする。X 上の非負関数 f に対して以前と同様

$$\widetilde{f}(a) = \begin{cases} f(a) & \textit{if } a \in X \setminus A \\ \min_{x \in A} f(x) & \textit{if } a = A \end{cases}$$

により $\widetilde{f}(x)$ を定める。 このとき

$$\rho_f(r) = \rho_{f_0}(r) \quad \forall r \geq 0,$$
$$\int_X^{Ch} f d\mu = \int_{X \setminus N_0}^{Ch} f d\mu$$

が成り立つ。

6 零点の単純性

X の μ に関する零点に対して次のような概念を導入する。

定義 12 単調測度 μ に対しての零点 x_0 が単純であるとは x_0 を含む影響要素が高々一つであることとする。

単純な零点に対して次のような性質が成り立つ。

命題 7 x_0, x_1 を μ に関する零点であるとする時次が成り立つ。

(a) x_0 を含む影響要素がないとき x_0 は強零点である。
(b) x_0, x_1 が単純で， 両方を含む影響要素があるとき，$\{x_0, x_1\}$ はアトムである。

これらの性質により，単純な零点のみを持つ場合には次を満たすように零加法化の空間を定めることができる。(強零点を除外しアトムを縮約することで得られる。)

(i) 全ての零点に影響要素が対応する。
(ii) 影響要素と零点の対応は 1 対 1 である。

例 13 $X = \{a, b, c\}$ 上の単調測度, μ を次で定める.

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0,\ \mu(\{c\}) = 1,$$
$$\mu(\{a, b\}) = 1, \mu(\{a, c\}) = 2,\ \mu(\{b, c\}) = 3,$$
$$\mu(\{a, b, c\}) = 3.$$

このとき，メビウス変換は次のようになる.

$$\tau_{\{a\}} = \tau_{\{b\}} = 0,\ \tau_{\{c\}} = 1,$$
$$\tau_{\{a,b\}} = \tau_{\{a,c\}} = 1,\ \tau_{\{b,c\}} = 2,$$
$$\tau_{\{a,b,c\}} = -2.$$

また，ゼロ加法化した空間は

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &= \{c,\{a,b\},\{b,c\}\{a,c\}\}\\ &= \{c,\alpha,\beta,\gamma\},\\ & \quad N=\{a,b\},\ \mathcal{A}=\{\alpha,\beta,\gamma\}.\end{aligned}$$

となる．上で説明した方法でメビウス変換を構成すると，

$$\begin{aligned}&\widetilde{\tau}_{\{c\}}=1,\widetilde{\tau}_{\{\alpha\}}=1,\ \widetilde{\tau}_{\{\beta\}}=1,\ \widetilde{\tau}_{\{\gamma\}}=2,\\ &\widetilde{\tau}_{\{c,\alpha\}}=\widetilde{\tau}_{\{c,\beta\}}=\widetilde{\tau}_{\{c,\gamma\}}=0,\\ &\widetilde{\tau}_{\{c,\alpha,\beta\}}=\widetilde{\tau}_{\{c,\beta,\gamma\}}=\widetilde{\tau}_{\{c,\alpha,\gamma\}}=0,\\ &\widetilde{\tau}_{\{\alpha,\beta\}}=\widetilde{\tau}_{\{\beta,\gamma\}}=\widetilde{\tau}_{\{\alpha,\gamma\}}=0,\\ &\widetilde{\tau}_{\{\alpha,\beta,\gamma\}}=0,\\ &\widetilde{\tau}_{\{c,\alpha,\beta,\gamma\}}=(\tau_{a,b,c}=)-2.\end{aligned}$$

このメビウス変換に対応する集合関数を $\widetilde{\mu}$ と置くと $\widetilde{\mu}(\{\alpha,\beta,\gamma\})=4$, $\widetilde{\mu}(\{c,\alpha,\beta,\gamma\})=3$ となるので，この変換によってつくられる集合関数は一般に単調性はない．したがって, ショケ積分はメビウス変換を用いて定義されるものとする．

X 上の関数 f を $f(a)=1,f(b)=2,f(c)=3$ と定めるとき，

$$\begin{aligned}&f(\alpha)=f(a)\wedge f(b)=1,\ f(\beta)=f(a)\wedge f(c)=1,\\ &f(\gamma)=f(b)\wedge f(c)=2\end{aligned}$$

となる．$\int$ でショケ積分を表すことにすると，

$$\begin{aligned}&\int f d\mu=\sum_{B\subset X}\min_{x\in B} f(x)\tau_B\\ =\ & f(c)\tau_{\{c\}}+(f(a)\wedge f(b))\tau_{\{a,b\}}+(f(a)\wedge f(c))\tau_{\{a,c\}}+\\ & (f(b)\wedge f(c))\tau_{\{b,c\}}+(f(a)\wedge f(b)\wedge f(c))\tau_{\{a,b,c\}}\\ =\ & 3\times 1+1\times 1+1\times 1+2\times 2+1\times(-2)=7.\end{aligned}$$

他方, 変換後のショケ積分は

$$\begin{aligned}&\int f d\widetilde{\mu}=\sum_{U\subset\widetilde{X}}(\min_{x\in U} f(x))\widetilde{\tau}_U\\ =\ & f(c)\widetilde{\tau}_{\{c\}}+f(\alpha)\widetilde{\tau}_{\{\alpha\}}+f(\beta)\widetilde{\tau}_{\{\beta\}}+f(\gamma)\widetilde{\tau}_{\{\gamma\}}+\\ & (f(\alpha)\wedge f(\beta)\wedge f(\gamma)\wedge f(c))\widetilde{\tau}_{\{c,\alpha,\beta,\gamma\}}\\ =\ & 3\times 1+1\times 1+1\times 1+2\times 2+1\times(-2)=7.\end{aligned}$$

となり，2 つのショケ積分は一致していることが分かる．

$\widetilde{\mu}$ には一般に単調性がないが，これは新しい空間におけるメビウス変換の決め方による可能性がある．上の例では追加影響要素のポイントマスが大きすぎるために単調性がくずれている．

7 まとめ

有限集合の上の集合関数に対する零加法化に対して，零点が単純な構造を持つ場合の解析を行った。強零集合を取り除き，アトムを 1 点とみなすことで 1 対 1 の対応ができることがわかった。

参考文献

[1] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, Null Additivization of a Monotone Measure on a Finite Set, Proceedings of MDAI2022

[2] J. Li, R. Mesiar, E. Pap, Atoms of weakly null-additive monotone measures and integrals, Information Sciences 257(1),2014, 183-192

連絡先

福田亮治
E-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp