k-加法的集合関数の非離散化とその応用

福田亮治　(大分大理工)*

1. はじめに

可測空間上の集合関数が単調性を持ち空集合で 0 であるとき，ファジィ測度と呼ばれる。この報告では，空集合では0 であることを常に仮定するが，単調性は必ずしも仮定しない集合関数を扱う。いずれにしても，測度の重要な性質である加法性を仮定しないため，積分などのそれに関わる手法において，基本的性質として用いられていた様々な性質が満たされないことになる。この報告では，それらをどう克服するかという問題に対して，k-加法性という概念を非離散的に一般化した試みに関して，ファジィシステム研究所の岡崎悦明先生, 九州工業大学の本田先生との共同研究を中心に紹介する。

有限集合上の集合関数に関する概念や理論は，協力ゲーム理論 ([1, 2]) や証拠理論 (デンプスター・シェーファー理論 ([3, 4]) などの応用分野をその基礎としているものが多い。集合に関して何らかの数値を対応付ける集合関数は，一般的に加法性を持つとは限らないことは言うまでもないが，多くの場合に加法性を持つ場合と類似した概念を用いて解析される。それらは，初期段階においては無意識にまたは煩雑になるのを避けるために，加法性があるものとして処理されてきた。身近な例を挙げると，試験の点数の合計によって優劣を計る場合には，満点を 100 点にそろえて全てを加えることで合計点で評価することが多い。大学入試などで共通に行われる試験をもとに評価をする場合，科目ごとに重みづけを与えた点数を足し合わせることがあるが，これは有限集合上の加法的な測度に関する積分に相当する。この方法を車の車種の人気度の定量化に適用することを考えてみる。それぞれの車種に対して，売上額などをもとに人気度が定量化されているとする。また，その自動車 (車種) を説明するために，燃費や，性能，デザインの良さなどをもとにした何項目かの数値 (説明変数) があるとする。テストデータとして，十分な数の車種それぞれに対して，人気度と説明変数 (ベクトル) の組が与えられている場合，その線形和で人気度を近似することができる。これを加法的な測度に対する積分モデルと考えると，基礎となる測度を非加法的なものに変えたものが，ショケ積分などのファジィ積分を基礎とした近似モデルで，よりデリケートな解析ができることになる。[5, 6]

これらの手法で実用上問題になることの一つに，説明変数の種類の増加に伴うパラメータ数の増加がある。n 個の要素からなる集合上に加法的な測度を考える場合，1 点集合毎の測度である n 個のパラメータより一意に決定することができる。これに対し，加法性を仮定しない場合は 2^n 個の自由度を持つことになる。この様な指数オーダーの発散は多くの場合非現実的な状況を生み出す。例えば 18 個の集合で 26 万を超えるパラメータ数となりその同定は容易ではない。ちなみに 18 は 2023 年 4 月時点の大分県の市町村の数で全国で 2 番目に少ない。この様なパラメータの増加を軽減するための手法の一つとして，k-加法的測度 (k は自然数) への制限が挙げられる。正確な定義は次節に述べるが，集合関数において $k+1$ 個以上の要素の相互関係を無視したものとして定義される。この場合同定に必要なパラメータ数を要素数の k 乗のオーダーに抑えるこ

*e-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp

とができる。例えば要素数18の集合での 2-加法的な集合関数のパラメータ数は171となり，計算機を用いた解析においては十分に計算可能な数だと思われる。

テイラー展開やフーリエ展開/変換などの積分を用いた様々な手法は離散的な解析においても様々な発展を見ることができる。これらは連続的な無限集合のものを離散的に解析する手法であると共に，要素数や参照点を現実的に計算できる数まで減らすための手法とも見ることができる。非加法的集合関数に対してもこれに相当する非離散化により同様の発展が期待される。実際非離散的な可測空間上で定義される集合関数(主にファジィ測度) に対して，積分の非離散化や単調収束定理などの解析が盛んにおこなわれている ([7, 8])。この報告では k - 加法性に対して，2つの視点からその非離散化を検討してみる。一つはメビウス変換を用いた集合関数の表現を直積空間や (有限) 部分集合の空間上の測度を用いた表現とみなし，それを非離散的に拡張する方法であり，もう一つはメビウス変換を非離散化した上でそれを用いた性質として k - 加法性を特徴づける方法である。前者を構成的な k 加法性，後者を定式的な k 加法性と呼ぶことにする。

なお，メビウス変換の非離散化や加法的な集合関数による表現についてはDenneberg [9], 成川・室伏 [10] などでも議論されてて，ここで議論されていることと関連が大きい。残念ながら，情報を得たのが最近であるため，関連する他の研究を含め詳細な説明は次の機会とさせていただきたい。

構成的な k 加法性の基礎となる考え方は デンプスター・シェーファー理論の基本確率割り当てに見ることができる ([3] 参照)。デンプスター・シェイファー理論では，有限集合上の集合関数が，そのべき集合上に定義される確率測度を用いて表現される場合を考えているが，確率測度を実測度に変えることにより全ての集合関数を表現することができ，これはメビウス変換を用いた表現と同じものである。このべき集合を k 個の直積空間として定めたものがMesiar [11] における k - 加法化であり，k 個までの有限部分集合として定めたものが [12] における k - 加法化である。これらは本質的には同じものと考えてよい。この意味での k 加法性を持つ集合関数は積分の計算などで解析しやすい特徴を持つが，[13] では (構成的な)k-加法性を持つ単調測度に対するPan積分の単調減少収束定理を得ている。

[14] におけるメビウス変換の非離散化は互いに素な任意有限個の集合を変数とする集合関数 $\tau = \tau(A_1, \cdots, A_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ として定義される。ある有限分割の有限個の集合一つずつをアトムと考え，これを含む最小の σ 集合体 (これも有限集合族) に集合関数を制限したとき，本質的には有限集合上の集合関数となる。上のメビウス変換は，この集合関数に対するメビウス変換と同じものである。この非離散化されたメビウス変換に対して，集合の個数が $k+1$ 個以上の場合の $\tau(\cdots)$ の値が0になることで k 加法性を定義することができる。[14] では一定の性質 (強ダルブー性) を持つ有限測度をベースとした歪測度が，この意味での (定式的な)k-加法性を持つことと歪関数 (測度を変換する関数) が多項式であることが同値であることを示している。また，構成的な k-加法的集合関数はすべて定式的な k-加法的集合関数であり，一定の条件下 (全有界性と強い連続性) では定式的な k-加法的集合関数は構成的な k-加法性を持つことが [15] で示されている。さらに，[16] では構成的 k 加法性において $k \to \infty$ とした「構成的集合関数」を定め，歪関数が解析的な場合に (少し条件を加えれば) 構成的集合関数になることを示している。また，構成的集合関数に対して，その有限次元要素 (k 加法性 $(k < \infty)$ に対応する集合の値) を非離散化したメビウス変換を用いて抽出できることも示されて

いる。

2. 有限集合上の集合関数とメビウス変換

この節では集合関数に関するいくつかの概念やNotationを与え，有限集合の場合を中心にその性質について述べる。この節で紹介する概念や性質は一般的によく知られているもので [17, 18] などで扱われているいる。ただ，設定その他において多少一般的なものと扱いを変えているものがある。奇異に感じるところがあればぜひとも今後の改善のため何らかの形でご指摘いただきたい。(この節については基本的に証明を併記することにする。)

この報告を通して，$(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする。すなわち X を集合, $\mathcal{B} \subset 2^X$ をσ集合体とする。全体集合を有限集合として議論する場合は，全体集合をNと表し，特に断らなければ $\mathcal{B} = 2^N$ と定められているものとする。この報告においては，全ての $(X, \mathcal{B})$ 上の (または N 上の) 集合関数$\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, $(\mu : 2^N \to \mathbb{R})$ は$\mu(\emptyset) = 0$ を満たし，$\pm\infty$ の値は取らないものとする。集合関数 μ が単調性 ($A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$) をみたすとき, ファジィ測度と呼ばれる。

定義 1 メビウス変換

μ を有限集合 N 上の集合関数とする。μ に関するメビウス変換 $\left\{\tau_A^{(\mu)}\right\}_{A \subset N}$ を $|A|$ に関して帰納的に次のように定める。

(a) $\quad \tau_\emptyset = 0, \quad \tau_{\{a\}} = \mu(\{a\}).$

(b) $\quad \tau_A = \mu(A) - \sum_{B \subsetneq A} \tau_B.$

μ に対応することを特筆する場合には$\tau^{(\mu)}$ と記述することにする。

集合をパラメータとして和を考える場合などに $\emptyset$ を除いて考えることが多い。 この報告では煩雑さをさけるために $\emptyset$ に対応する値は0としている。

通常次の命題の (b) をもってメビウス変換の定義とする場合が多く，その場合(a)の証明は以下に示す (b) の証明と同様に与えることができる。

N 上の集合関数 μ に対するメビウス変換τは次の性質を満たす。

補題 2 N 上の集合関数μに対して次が成り立つ。

(a)
$$\mu(A) = \sum_{B \subset A} \tau_B.$$

(b)
$$\tau_A = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A|-|B|} \mu(B).$$

証明 (a) は定義から直ちに成り立つ。

(b) の証明

$|A|$ に関する帰納法で示す。$|A| =$ 1 のとき，すなわち $A = \{a\}$, $a \in N$のとき

$$\tau_{\{a\}} = \mu(\{a\})$$

より自明。$|B|<|A|$ なる $B\subset N$ に対して全て成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}\tau_A &= \mu(A)-\sum_{B\subsetneq A}\tau_B \\ &= \mu(A)-\sum_{B\subsetneq A}\sum_{C\subset B}(-1)^{|B|-|C|}\mu(C) \\ &= \mu(A)+\sum_{C\subsetneq A}\left(-\sum_{C\subset B\subsetneq A}(-1)^{|B|-|C|}\right)\mu(C) \qquad (1)\end{aligned}$$

(1) において $-\sum_{C\subset B\subsetneq A}(-1)^{|B|-|C|}$ は集合の個数のみによって定まる。

$$C\subset B\subset A \quad\Leftrightarrow\quad B\setminus C\subset A\setminus C$$

であるので $B\subset A$ の個数を限定するとき (個数ごとに分けて考える)，$j=|B|-|C|=0,1,\ldots,|A|-|C|-1$ と置くと，$|\{B:C\subset B\subset A\}|={}_{|A|-|C|}C_j$ となる。

$$\begin{aligned}(1) &= \mu(A)-\sum_{C\subsetneq A}\sum_{j=0}^{|A|-|C|-1}{}_{|A|-|C|}C_j\,(-1)^j\mu(C) \\ &= \mu(A)+\sum_{C\subsetneq A}\left((-1)^{|A|-|C|}-\sum_{j=0}^{|A|-|C|}{}_{|A|-|C|}C_j(-1)^j\right)\mu(C) \\ &= \mu(A)+\sum_{C\subsetneq A}\left((-1)^{|A|-|C|}-(1-1)^{|A|-|C|}\right)\mu(C) \\ &= \sum_{C\subset A}(-1)^{|A|-|C|}\mu(C) \qquad (2)\end{aligned}$$

よって全ての $A\subset N$ に対して成り立つことがわかる。 □

定義 3 N 上の集合関数μ が k - 加法的であるとは，対応するメビウス変換τ が

$$|B|>k\ \Rightarrow\ \tau_B=0,\quad (B\subset N).$$

を満たすこととする。

k 加法的測度のメビウス変換は，k 個までの集合に対応する項を除いて 0 となる。これらをパラメータと考える場合，$|N|$ の増加に対して $|N|^k$ のオーダーの発散になる。

定義 4 可測空間 $(X,\mathcal{B})$ に対して，

$$\mathcal{D}=\{\mathbb{D}=\{D_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{B}:n\in\mathbb{N},\{D_k\}_{k=1}^n:\text{互いに素}\}$$

により $\mathcal{D}$ を定める。$\mathbb{D}=\{D_k\}_{k=1}^n\in\mathcal{D}$ に対して

$$|\mathbb{D}|=n,\quad \cup\mathbb{D}=\bigcup_{k=1}^n D_k,$$

と定める。 また $\mathbb{D}'\subset\mathbb{D}$ や$\mathbb{D}'\subsetneq\mathbb{D}$ であることを，有限集合族としての包含関係として定める。$(X,\mathcal{B})$ 上の集合関数 μ のメビウス変換$\tau=\tau^\mu$ を$\mathcal{D}$ 上の関数として帰納的に次で定める。

(a) $|\mathbb{D}| = 1$ のとき $\mathbb{D} = \{D\}$ に対して $\tau(\mathbb{D}) = \mu(D)$ とする。

(b) $|\mathbb{D}'| < |\mathbb{D}|$ に対して定義されているとき

$$\tau(\mathbb{D}) = \mu(\cup\mathbb{D}) - \sum_{\mathbb{D}'\subsetneq\mathbb{D}} \tau(\mathbb{D}')$$

と定める。

上の定義は μ を $\mu(\mathbb{D}') = \mu(\cup\mathbb{D}')$ とみなし $N = \mathbb{D}$ 上に定まる集合関数とみてメビウス変換を定めていることと同等になる。X が有限集合の場合は，２種類のメビウス変換が定義されることになるが，先に定義した方は $\{\tau_A\}_{A\subset N}$ の形で表記し区別することにする。

補題 2 は次のように表現される。(証明は本質的に同じ)

補題 5 $\mathbb{D} \in \mathcal{D}$ に対して次が成り立つ。

(a)
$$\mu(\cup\mathbb{D}) = \sum_{\mathbb{D}'\subset\mathbb{D}} \tau(\mathbb{D}').$$

(b)
$$\tau(\mathbb{D}) = \sum_{\mathbb{D}'\subset\mathbb{D}} (-1)^{|\mathbb{D}|-|\mathbb{D}'|}\mu(\cup\mathbb{D}').$$

次に，メビウス変換と零集合の関係を述べる。加法的な測度に関する零集合は，その単調性や加法性から扱いが単純だが，非加法的で単調性もない場合注意が必要になる。

定義 6 零集合 μ を $((X, \mathcal{B})$ または N 上の集合関数, $A \in \mathcal{B}$ とする。

(a) A が零集合 (null set, μ-null set) であるとは，$\mu(A) = 0$ であることとする。

(b) A が完全零集合 (c-null set, c-μ-null set) であるとは，任意の $B \in \mathcal{B}$, $B \subset A$, が $\mu(B) = 0$ を満たすこととする。

(c) A が強零集合 (s-null set, s-μ-nullset) であるとは，任意の $B, C \in \mathcal{B}$, $B \subset A$, が $\mu(C) = \mu(C \cup B)$ を満たすこととする。

集合関数が単調であれば，零集合は完全零集合になる。また集合関数が (有限) 加法的であれば完全零集合は強零集合になる。

補題 7 μ を集合関数とするとき次が成り立つ。

(a) A が完全零集合であることと次が同値になる。

$$\begin{array}{ll} N \text{ 上の場合} & \tau_B = 0 \quad \forall B \subset A. \\ (X, \mathcal{B}) \text{ 上の場合} & \tau(\mathbb{D}) = 0 \quad \text{if } \cup\mathbb{D} \subset A. \end{array}$$

(b) A が強零集合であることと次が同値になる。

$$\begin{array}{ll} N \text{ 上の場合} & \tau_B = 0 \quad \text{if } B \cap A \neq \emptyset. \\ (X, \mathcal{B}) \text{ 上の場合} & \tau(\mathbb{D}) = 0 \quad \text{if } \exists D \in \mathbb{D} \text{ s.t. } D \subset A. \end{array}$$

証明　(a) N 上の集合関数の場合に示す。

必要性:　A が完全零集合であるとするとき，$B \subset A$ が $\tau_B \neq 0$ であるものが存在するとする。$m = \min_{B \subset A, \tau_B \neq 0} |B|$ と置く。$|B| = m$ と なる $B \subset A$ を一つ選ぶ。(背理法の仮定から $m \in \mathbb{N}$ として存在する) このとき

$$\mu(B) = \sum_{C \subset B} \tau_C = \tau_B + \sum_{C \subsetneq B} \tau_C.$$

B の定め方から $C \subsetneq B$ すなわち $|C| < |B|$ ならば $\tau_C = 0$ なので

$$\mu(B) = \tau_B \neq 0.$$

となり $B \subset A$ であるので A が完全零集合であることに矛盾する。

十分性:　$B \subset A$ がすべて $\tau_B = 0$ を満たすとき任意の $A' \subset A$ に対して

$$\mu(A') = \sum_{B \subset A' (\subset A)} \tau_B = 0.$$

となり Aが完全零集合であることがわかる。

(b) N 上の集合関数の場合に示す。

必要性:　A が強零集合であるとするとき，$\tau_B \neq 0,\ B \cap A \neq \emptyset$ とする。このとき $\exists a \in B \cap A$ である。

$$m = \min_{a \in B', \tau_{B'} \neq 0} |B'|$$

と置くと $m > 0$ となるが，必要なら入れ替えることにより $|B| = m,\ a \in B, \tau_B \neq 0$ となるとしてよい。

このとき

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \sum_{C \subset B} \tau_C \\
&= \sum_{C \subset B, a \in C} \tau_C + \sum_{C \subset B \setminus \{a\}} \tau_C
\end{aligned}$$

第一項について $a \in C \subsetneq B$ であれば m の最小性から $\tau_C = 0$ となるので，

$$\begin{aligned}
\text{第一項} &= \tau_B + \sum_{C \subsetneq B, a \in C} \tau_C \\
&= \tau_B \neq 0
\end{aligned}$$

よって

$$\mu(B) = \tau_B + \sum_{C \subset B \setminus \{a\}} \tau_C = \tau_B + \mu(B \setminus \{a\}).$$

これは，$\mu(B) \neq \mu(B \setminus \{a\})$ を意味し，$\{a\} \subset A$ であるので A が強零集合であることに矛盾する。

十分性: 仮定より $C \cap A \neq \emptyset$ であれば $\tau_C = 0$ であるので，任意の $S \subset N$ と $B \subset A$ に対して

$$\begin{aligned}\mu(B \cup S) &= \sum_{C \subset B \cup S} \tau_C \\ &= \sum_{C \subset S} \tau_B + \sum_{C \subset B \cup S, C \cap A \neq \emptyset} \tau_C \\ &= \sum_{C \subset S} \tau_C = \tau(S)\end{aligned}$$

□

次に零加法性について議論する。これも完全零集合に関する考察をすることで，メビウス変換との関連が得られる。

定義 8 (零加法性，完全零加法性)

(a) 集合関数 μ が零加法的 (完全零加法的) であるとは任意の零集合 (完全零集合) A と任意の $B \in \mathcal{B}$ (または $B \subset N$) に対して,

$$\mu(B) = \mu(B \cup A)$$

を満たすこととする。

(b) 集合関数 μ が弱零加法的 (完全弱零加法的) であるとは任意の 2 つの零集合 (完全零集合)A, B に対して $A \cup B$ が 零集合 (完全零集合) であることとする。

完全零加法的であるとは，任意の完全零集合が強零集合になることでもある。

完全零加法性，完全弱零加法性については次の性質が成り立つ。

補題 9 (a) N 上の集合関数 μ が完全零加法的であることと次が同値である。

$$(A \subset N,\ \exists a \in A,\ \text{s.t. } \mu(\{a\}) = 0) \Rightarrow \tau_A = 0.$$

(a)' $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が完全零加法的であることと次が同値である。

$$(\mathbb{D} = \{D_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{D},\ \exists k \leq n \text{ s.t. } \mu(D_k) = 0) \Rightarrow \tau(\mathbb{D}) = 0.$$

(b) N 上の集合関数 μ が完全弱零加法的であることと次が同値である。

$$(A \subset N,\ \mu(\{a\}) = 0\ \forall a \in A) \Rightarrow \tau_A = 0.$$

(b)' $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が完全弱零加法的であることと次が同値である。

$$(\mathbb{D} = \{D_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{D},\ \mu(D_k) = 0\ \forall k \leq n) \Rightarrow \tau(\mathbb{D}) = 0.$$

証明　(a), (b) のみを示す。((a)',(b)' はそれらと本質的に同等。)

(a)　$\exists a \in A,\ \mu(\{a\}) = 0$ s.t. $\tau_A \neq 0$ とする。

$$m = \min_{a \in B, \tau B \neq 0} |B|$$

とすると仮定から $m \in \mathbb{N}$ として存在するので，必要なら入れ替えることで，$|A| = m$ としてよい。$B \subsetneq A,\ a \in B$ であれば m の定め方から $\tau_B = 0$ であるから，

$$\begin{aligned} \mu_A &= \sum_{B \subset A} \tau_B \\ &= \tau_A + \sum_{B \subsetneq A, a \in B} \tau_B + \sum_{B \subset A \setminus \{a\}} \tau_B \\ &= \tau_A + \sum_{B \subset A \setminus \{a\}} \tau_B \\ &= \tau_A + \mu(A \setminus \{a\}) \neq \mu(A \setminus \{a\}) \end{aligned}$$

よって μ が完全零加法的ではないことになり，十分性が証明された。

必要性の証明のために，

$$a \in C,\ \mu(\{a\}) = 0 \ \Rightarrow\ \tau_C = 0$$

を仮定する。A を完全零集合, $B \subset N$ とするとき仮定より $C \cap A \neq \emptyset$ であれば $\tau_C = 0$ が成り立つ。ここに一般性を失うことなく $A \cap B = \emptyset$ としておくと，

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \sum_{C \subset A \cup B} \tau_C \\ &= \sum_{C \subset B} \tau_C + \sum_{C \subset B \cup A, C \cap A \neq \emptyset} \tau_C \\ &= \sum_{C \subset B} \tau_C = \mu(B) \end{aligned}$$

となり必要性を得る。

(b)

$$A \subset N,\ \mu(\{a\}) = 0\ \forall a \in A, \quad \tau_A \neq 0$$

となる A があったとする。以前の議論と同様に A はこの様な性質を持つ集合の中で個数が最小のものとしてよい。すなわち $A' \subsetneq A$ であれば $\tau_{A'} = 0$ である。このとき $a_0 \in A$ を任意に定めると 仮定より $\mu(\{a_0\}) = 0$ これは 1 点集合なので完全零集合。A の個数最小性より， $B \subsetneq A$ であれば $\tau_B = 0$であるので任意の $C \subset A \setminus \{a_0\}$ に対して

$$\mu(C) = \sum_{B \subset C} \tau_B = 0$$

となり, $A \setminus \{a_0\}$ が完全零集合であることがわかる。

$$\begin{aligned} & \mu(A \setminus \{a_0\} \cup \{a_0\}) = \mu(A) \\ =& \sum_{B \subset A} \tau_B \\ =& \sum_{B \subsetneq A} \tau_B + \tau_A \\ =& \tau_A \neq 0 \end{aligned}$$

となるので弱零加法性が成り立たないことになる。よって十分生を得られた。

$$A \subset N,\ \mu(\{a\}) = 0\ \forall a \in A \Rightarrow \tau_A = 0$$

を仮定し，A, B を完全零集合とするとき $C \subset A \cup B$ に対して $\mu(\{a\}) = 0,\ \forall a \in C$ であるから仮定より $\tau_C = 0$ $(\forall C \subset A \cup B)$。 よって

$$\mu(A \cup B) = \sum_{C \subset A \cup B} \tau_C = 0$$

となり必要性も示された。 □

続いてショケ積分を定めメビウス変換との関連について述べる。

定義 10 (G.Choquet[19])
μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数, f を $(X, \mathcal{B})$ 上の非負可測関数とするとき

$$\rho(r) = \rho_f(r) = \mu(\{x : f(x) \geq r\}).$$

により分布関数 $\rho(r)$ を定める。この分布関数を用いて f のショケ積分を次で定める。

$$\int^{\mathrm{ch}} f d\mu = \int_0^\infty \rho(r) dr.$$

有限集合上のショケ積分については次の性質が成り立つ。

補題 11 μ を N 上の集合関数，f を N 上の非負関数とする。この時次が成り立つ。

$$\int^{\mathrm{ch}} f d\mu = \sum_{B \subset N} \min_{x \in B} f(x) \tau_B.$$

証明 $N = \{x_k\}_{k=1}^n, 0 \leq f(x_1) \leq \cdots \leq f(x_n)$ であるとする。$y_k = f(x_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$, $y_0 = 0$ と置くとき，$r > f(x_n) = y_n \Rightarrow \rho(r) = 0$ であるので

$$\begin{aligned} \int^{\mathrm{ch}} f d\mu &= \int_0^\infty \rho(r) dr = \int_0^{y_n} \rho(r) dr \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{y_{k-1}}^{y_k} \rho(r) dr \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{y_{k-1}}^{y_k} \rho(r) dr \end{aligned} \tag{3}$$

$r \in (y_{y_k - 1}, y_k]$ であるとき

$$\rho(r) = \mu(\{x : f(x) \geq r\}) = \mu(\{x : f(x) \geq y_k\}) = \rho(y_k).$$

となる。 $y_{n+1}=f(x_n)+1$ と置くと $\rho(y_{n+1})=0$ であるので

$$
\begin{aligned}
(3) &= \sum_{k=1}^{n}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\rho(y_k)dr \\
&= \sum_{k=1}^{n}\rho(y_k)(y_k-y_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\rho(y_k)y_k-\sum_{k=1}^{n}\rho(y_k)y_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\rho(y_k)y_k-\sum_{k=0}^{n-1}\rho(y_{k+1})y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}y_k(\rho(y_k)-\rho(y_{k+1}))+\rho(y_n)y_n-\rho(y_1)y_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n}y_k(\rho(y_k)-\rho(y_{k+1})) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ここに，$\rho(y_{n+1})=\rho(y_n+1)=0$, $y_0=0$ であることを用いている。

$A_k=\{x_k,x_{k+1},\ldots,x_n\}$ と置くと ($A_{n+1}=\emptyset$ として) $k=1,2,\ldots,n+1$ に対して $\rho(y_k)=\mu(A_k)$ が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(4) &= \sum_{k=1}^{n}y_k\left(\sum_{B\subset A_k}\tau_B-\sum_{B\subset A_{k+1}}\tau_B\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}y_k\left(\sum_{B\subset A_k,x_k\in B}\tau_B\right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$B\subset A_k$, $x_k\in B$ であれば $y_k=f(x_k)=\min_{x\in B}f(x)$ であるので，

$$
\begin{aligned}
(5) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{B\subset A_k,x_k\in B}y_k\tau_B \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{B\subset A_k,x_k\in B}\min_{x\in B}f(x)\tau_B \\
&= \sum_{B\subset N}\min_{x\in B}f(x)\tau_B
\end{aligned}
$$

となり求める結果を得る。 □

この性質によりショケ積分は，メビウス変換の線形結合で表すことができる。ある種の定量化が，ある (有限) 集合上に定義される関数毎に数値が対応するような状況で，一定量のデータが得られている場合に，ショケ積分で近似されることを仮定する事で，内在する集合関数を近似することができる。例えば，車の性能を燃費や可測，操作性といった性能，外見や内装といった意匠的観点などについてそれぞれ定量化しているとして，別に定量化した総合評価 (人気度など) をこれらの項目を使って表現したい場合に，ショケ積分を用いた集合関数の同定が有効である。その場合，一般にはパラメー

タ数は集合要素数の指数オーダーでの発散となるため，k - 加法性を仮定した解析が実用的であることが多い。

続いてシャープレイ値とメビウス変換との関連について述べる。

定義 12 μ を N 上の集合関数とする。$x \in N$ のシャープレイ値を次で定める。

$$\phi(x) = \phi_\mu(x) = \sum_{A \subset X \setminus \{x\}} \frac{|A|!(|N| - |A| - 1)!}{|N|!} \left(\mu(A \cup \{x\}) - \mu(A)\right)$$

シャープレイ値は，注目する要素が対応する集合関数で見た時にどの程度貢献しているかを数値化したものであるが，次の性質を用いてメビウス変換を通してみた方が意味が分かりやすいかもしれない。

補題 13 μ を N 上の集合関数とするとき次が成り立つ。

$$\phi(x) = \sum_{x \in A \subset N} \frac{1}{|A|} \tau_A.$$

証明　補題 2 (a) より，$x \notin A$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mu(A \cup \{x\}) - \mu(A) &= \sum_{B \subset A \cup \{x\}} \tau_B - \sum_{B \subset A} \tau_B \\ &= \sum_{B \subset A} \tau_{B \cup \{x\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{A \subset N \setminus \{x\}} \frac{|A|!(|N| - |A| - 1)!}{|N|!} \left(\mu(A \cup \{x\}) - \mu(A)\right) \\ &= \sum_{A \subset N \setminus \{x\}} \frac{|A|!(|N| - |A| - 1)!}{|N|!} \sum_{B \subset A} \tau_{B \cup \{x\}} \\ &= \sum_{B \subset N \setminus \{x\}} \left(\sum_{B \subset A, a \notin A} \frac{|A|!(|N| - |A| - 1)!}{|N|!} \right) \tau_{B \cup \{x\}} \end{aligned}$$

このとき

$$\sum_{B \subset A, a \notin A} \frac{|A|!(|N| - |A| - 1)!}{|N|!} = \frac{1}{|B| + 1}$$

を示せばよい。

$B \subset A \subset N \setminus \{x\}, m = |B|$ のとき，

$$m \leq |A| \leq |N| - 1$$

$j = |A| - m$ と置くとき，j は $0 \leq j \leq |N| - m - 1$ 満たす範囲で動く。$|A| = j + m$ のとき

$$\frac{|A|!(|N| - |A| - 1)!}{|N|!} = \frac{(j + m)!(|N| - 1 - j - m)!}{|N|!}$$

となるが，$|A| = j+m$ となるのは ${}_{|N|-1-m}C_j$ 通りあるので，示すべき式は

$$\sum_{j=0}^{|N|-m-1} {}_{|N|-1-m}C_j \times \frac{(j+m)!(|N|-1-j-m)!}{|N|!} = \frac{1}{m+1}. \tag{6}$$

となる。これを $|N|$ に関する帰納法で示す $(|N| \geq m+1)$。

$|N| = m+1$ のとき，次のように成り立つ。

$$(6) = \sum_{j=0}^{0} {}_0C_j \frac{(j+m)!(0-j)!}{(m+1)!} = \frac{1}{m+1}.$$

$|N| > m+1$ のとき $|N'| = |N|-1$ の場合の成立を仮定する。このとき

$$\begin{aligned}
(6)\,\text{左辺} &= \frac{1}{m+1} \\
&= \sum_{j=0}^{|N|-2-m} {}_{|N|-2-m}C_j \frac{(j+m)!(|N|-2-j-m)!}{(|N|-1)!} \\
&= \sum_{j=0}^{|N|-2-m} \frac{(|N|-2-m)!}{j!(|N|-2-m-j)!} \times \frac{(j+m)!(|N|-2-j-m)!}{(|N|-1)!} \\
&= \sum_{j=0}^{|N|-2-m} \frac{(|N|-2-m)!(j+m)!}{j!(|N|-1)!}
\end{aligned}$$

両辺に $\dfrac{|N|-1-m}{|N|}$ をかけて

$$\begin{aligned}
&\frac{|N|-1-m}{|N|(m+1)} \\
&= \frac{|N|-1-m}{|N|} \times \sum_{j=0}^{|N|-2-m} \frac{(|N|-2-m)!(j+m)!}{j!(|N|-1)!} \\
&= \sum_{j=0}^{|N|-2-m} \frac{(|N|-1-m)!(j+m)!}{j!(|N|)!}
\end{aligned}$$

級数の中の項は $j = |N|-1-m$ では

$$\frac{(|N|-1-m)!((|N|-1-m)+m)!}{(|N|-1-m)!(|N|)!} = \frac{1}{|N|}$$

この値を両辺に加えると

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{|N|-1-m} \frac{(|N|-1-m)!(j+m)!}{j!|N|!} \\
&= \frac{|N|-1-m}{|N|(m+1)} + \frac{1}{|N|} = \frac{1}{m+1}
\end{aligned}$$

よって N の時に成り立つ。 $\square$

3. 抽出空間 [12]

$(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする。正の整数 k に対して $X^{[k]}$, $X^{[\le k]}$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} X^{[k]} &= \{\{x_j\}_{j=1}^{k} : x_j \in X, j \le k\}. \\ X^{[\le k]} &= \{\{x_j\}_{j=1}^{n} : n \le k, x_j \in X, j \le n\}. \end{aligned}$$

同様に 可測集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して，制限抽出 $A^{[k]}$, $A^{[\le k]}$ を次で定める。

$$\begin{aligned} A^{[k]} &= \{\{x_j\}_{j=1}^{k} : x_j \in A, j \le k\}. \\ A^{[\le k]} &= \{\{x_j\}_{j=1}^{n} : n \le k, x_j \in A, j \le n\}. \end{aligned}$$

注意　抽出空間や制限抽出の要素 $\{x_j\}_{j=1}^{n} \in X^{[\le k]}$ は X の有限部分集合なので, $x_j \ne x_{j'}$ if $j \ne j'$ $(j, j' \le n \le k)$ を満たす.

$X^{[\le k]}$ 上の σ-集合体 $\mathcal{B}^{[\le k]}$ を次で定める。

$$\mathcal{B}^{[\le k]} = \sigma(\{A^{[\le k]} : A \in \mathcal{B}\}),$$

ここに，$\sigma(\cdots)$ は $\cdots$ 部を含む最小の σ-集合体とする。

これらを用いて構成的 k - 加法性を次のように定める。

定義 14 可測空間上の集合関数 μ が構成的 k-加法性を持つ ($k \in \mathbb{N}$) とは，$\left(X^{[\le k]}, \mathcal{B}^{[\le k]}\right)$ 上の (有界) 実測度 ν が存在して

$$\mu(A) = \nu\left(A^{[\le k]}\right), \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

を満たすこととする。この時実測度 ν を μ に関する構成測度と呼ぶ。

注意　有限集合 N 上の集合関数 μ は，メビウス変換 $\{\tau_B\}_{B \subset N}$ を用いると，任意の $A \subset N$ に対して,

$$\mu(A) = \sum_{B \subset A} \tau_B \tag{7}$$

を満たすことを 補題2 で示した。(この資料におけるメビウス変換の定義ではほぼ自明な性質である。)

全体集合が有限である場合は，べき集合は k を全体集合の要素数とした抽出空間と考えてよい。メビウス変換の集合ごとの値をポイントマスと考えると，(7) は構成的 k-加法性の定義そのものである。この様な意味で有限集合上の集合関数は全て構成的 k-加法性を持つとみることができる。デンプスター・シェイファー理論における基本確率割り当ては，有限集合のべき集合上に確率測度を考えそれをメビウス変換として集合関数を再構成するもので，構成測度として確率測度を考えた場合に相当する。この場合は，単調で優加法的な集合関数になる。デンプスター・シェイファー理論の詳細については，[3] (菅野, 室伏) に説明があるので，ここでは紹介を割愛する。

非離散的集合関数としての，構成的 k - 加法性は [11] において紹介されているが，構成測度は抽出空間ではなく直積空間 X^n 上に定義されている。次の例でみるように，その場合構成測度に一意性がないことがわかる。

例 15 $X=\{a,b\}, \mathcal{B}=2^X$ とし，集合関数 μ を

$$\mu(\emptyset)=0,\ \mu(\{a\})=\mu(\{b\})=\mu(\{a,b\})=1.$$

と定める。$X^2=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$ とし，可測空間としての σ-集合体はべき集合を考える。ここで X^2 上の測度 ν,ν' として次のものを考える。

$$\begin{aligned} \nu &: \nu(\{(a,a)\})=\nu(\{(b,b)\})=1, \nu(\{(a,b)\})=-1, \nu(\{(b,a)\})=0 \\ \nu' &: \nu'(\{(a,a)\})=\nu'(\{(b,b)\})=1, \nu'(\{(a,b)\})=0, \nu'(\{(b,a)\})=-1 \end{aligned}$$

このとき $\nu \neq \nu'$ であるが $A=\{a\},\{b\},\{a,b\}$ の全てに対して

$$\nu(A^2)=\nu'(A^2)$$

が成り立つ。ちなみに 抽出空間上では $\{\{a,b\}\}=\{\{b,a\}\}=$ (集合としては同じ) であるので，この例でも一意性を持っている。

続いて一般に 構成的 k - 加法性を持つ集合関数に対して，構成測度が抽出空間上一意に定まることを説明する。まずは抽出空間上に次のような集合族を考える。

定義 16 $k\in\mathbb{N}$ または $k=\infty$ とし， $k=\infty$ の場合 $n\leq k$ は n の大きさに制限がないことを表すこととする。

(a)

$$\mathcal{D}=\{\mathbb{D}=\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}:n\in\mathbb{N},\ D_1,D_2,\ldots,D_n\in\mathcal{B}\text{は互いに素}\}$$

$\mathbb{D}=\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}\in\mathbb{D}$ に対して, $|\mathbb{D}|=n, \cup\mathbb{D}=\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n}D_j$ と定める。

(b) $\mathbb{D}=\{D_j\}_{j=1}^n\in\mathcal{D}$ に対して,

$$\begin{aligned} \Gamma_k(\mathbb{D}) &= \Gamma_k(D_1,\ldots,D_n) \\ &= \{\{x_i\}_{i=1}^m\subset\cup\mathbb{D}, m\leq k, \{x_i\}_{i=1}^m\cap D_j\neq\emptyset,\ \forall j\leq n\} \end{aligned}$$

$k<n$ のとき $\Gamma_k(\mathbb{D})=\emptyset$.

(c)

$$\mathcal{G}_k=\{\Gamma_k(\mathbb{D}):\mathbb{D}\in\mathcal{D}|\mathbb{D}|\leq k\}$$

.

(d)

$$\mathcal{A}_k=\left\{\bigcup_{j=1}^{n}G_j,\ G_j\in\mathcal{G}_k:n\leq k,\ \{G_j\}_{j=1}^n:\text{互いに素}\right\}$$

.

上で定めた記号において下付きの k が省略される場合，$k=\infty$ であるとする。

命題 1 上で定めた $\mathcal{A}_k$ は集合体になる。(全体集合，空集合を含み，補集合，有限和で閉じている。)

証明.

全ての $A \in \mathcal{B}$ に対して $A^{[\leq k]} = \Gamma_k(\{A\}) = \Gamma_k(A)$ である。特に全体集合，空集合に対しては. $X^{[\leq k]}, \emptyset = \emptyset^{[\leq k]} \in \mathcal{A}$.

$\mathbb{D} = \{D_1, \ldots, D_n\} \in \mathcal{D}$ $(|\mathbb{D}| \leq k)$ を任意の $\mathcal{D}$ の要素とするとき，. $\Gamma_k(\mathbb{D})^c \in \mathcal{A}$ を示す。$\{x_j\}_{j=1}^m \notin \Gamma_k(\mathbb{D})$ であれば，次のどれかを満たすことになる。

1. $\{x_j\}_{j=1}^m \in G_1 = \{(\bigcup_{i=1}^n D_i)^c\}^{[\leq k]}$.

2. $\{x_j\}_{j=1}^m \in G_2 = \Gamma_k((\bigcup_{i=1}^n D_i)^c, \bigcup_{i=1}^n D_i)$.

3. $\{x_j\}_{j=1}^m \in (\bigcup_{i=1}^n D_i)^{[\leq k]}$ and $\{x_j\}_{j=1}^m \notin \Gamma_k(\mathbb{D})$.

このとき $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ であり，$\{x_j\}_{j=1}^m \notin G_1 \cup G_2$ であれば，3. の条件を満たすことになる。次に $G'_1, G'_2, \ldots, G'_n$ を次のように定める。

4. Set $G'_1 = \left(\bigcup_{j=2}^n D_j\right)^{[\leq k]}$.

5. Set $G'_j = \Gamma_k(D_1, \cdots, D_{j-1}, \bigcup_{\ell=j+1}^n D_\ell)$ for $1 < j < n$.

6. Set $G'_n = \Gamma_k(D_1, \cdots, D_{n-1})$.

$\{x_j\}_{j=1}^m \in (\Gamma_k(\mathbb{D}))^c$ が $\cap G_1$ にも G_2 にも属していない場合は，$G'_1, \ldots, G'_n$, の何れかに属することになる。これらは互いに素なので，

$$(\Gamma_k(\mathbb{D}))^c = G_1 \cup G_2 \cup G'_1 \cup \cdots \cup G'_n \in \mathcal{G}.$$

であることがわかる。

引き続き, $\mathcal{G}$ の要素の任意の 2 つの共通部分が $\mathcal{A}$ に属することを示す。. $\Gamma_k(\mathbb{D}_1)$ $(\mathbb{D}_1 = \left\{D_i^{(1)}\right\}_{i=1}^{n_1})$, $\Gamma_k(\mathbb{D}_2)$ $(\mathbb{D}_2 = \left\{D_i^{(2)}\right\}_{i=1}^{n_2})$ を $\mathcal{G}$. の任意の要素とし，$G_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} D_i^{(1)}$, $G_2 = \bigcup_{j=1}^{n_2} D_j^{(2)}$ と置く。このとき $i \leq n_1$, $j \leq n_2$ に対して,

$$D_{i,j} = D_i^{(1)} \cap D_j^{(2)},$$

$$D_{n_1+1,j} = (G_1^c) \cap D_j^{(2)},\ D_{i,n_2+1} = D_i^{(1)} \cap (G_2^c),$$

と定める。任意の $i \leq n_1$ に対して $\{D_{i,j}\}_{j=1}^{n_2+1}$ は $D_i^{(1)}$ の分割であり, 任意の $j \leq n_2$ に対して $\{D_{i,j}\}_{i=1}^{n_1+1}$ は $D_i^{(2)}$ の分割である。

$$\mathcal{D}^* = \left\{\{D_{i_1,j_1}, \cdots, D_{i_n,j_n}\} \ :\ n \leq k,\ \begin{array}{l}\{i_\ell\}_{\ell \leq n} \supset \{1, \ldots, n_1\} \\ \{j_\ell\}_{\ell \leq n} \supset \{1, \ldots, n_2\}\end{array}\right\}.$$

と置くと

$$\Gamma_k(\mathbb{D}_1) \cap \Gamma_k(\mathbb{D}_2) = \bigcup_{\mathbb{D} \in \mathcal{D}^*} \Gamma_k(\mathbb{D}) \in \mathcal{A}.$$

を得る。

任意の2つの $\mathcal{A}$ の要素は，それぞれ $\mathcal{G}$ の要素の互いに素な有限和で表される。それらの和集合は，それぞれのグループ間での共通部分の和で表現できるが，上の議論からそれら一つずつが $\mathcal{A}$ の要素であることがわかるので，求める結果を得る。 □

$\mathcal{A}$ の要素は $A^{[\leq k]}$ およびその補集合の有限和および共通部分で表すことができるので，(帰納的に個数の少ないもので表現できるものを取り去ることで定めることができる），$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\{A^{[\leq k]} : A \in \mathcal{B}\})$ が成り立つ。

次の性質は，この節の以後の議論に必要なだけでなく，定式的な k - 加法性の定義や関連する性質を考える上での基礎となるものである。

命題 2 [14]　μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数，τ を対応するメビウス変換とする。$D_1, D_2, \ldots, D_n, D, D' \subset \mathcal{B}$ が互いに素であるとき

$$\mathbb{D}_0 = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\} \in \mathcal{D}.$$

は次の等式を満たす。

$$\tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D \cup D'\}) = \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D\}) + \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D'\}) + \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D, D'\}) \tag{8}$$

表記について　$\mathbb{D} = \{D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n\} \in \mathcal{D}$ であるとき $\mathbb{D}' = \{D_1, \ldots, D_{n-1}\}$ と $\{D_n\}$ を用いて $\mathbb{D} = \mathbb{D}' \cup \{D_n\}$ と表記することにする。

証明　$|\mathbb{D}_0|$ に関する帰納法を用いて示す。$|\mathbb{D}_0| = 0$ の場合は, τ の定義より

$$\begin{aligned} \tau(\{D_1 \cup D'_1\}) &= \mu(D_1 \cup D'_1) \\ &= \tau(\{D_1\}) + \tau(\{D'_1\}) + \tau(\{D_1, D'_1\}) \end{aligned}$$

を得るので，成り立つ。

任意の $n \in \mathbb{N}$ を固定して $|\mathbb{D}_0| \leq n-1$ の場合の成立を仮定し，$|\mathbb{D}_0| = n$ の場合を示す。

$$\begin{aligned} \mu(\cup(\mathbb{D}_0 \cup \{D, D'\})) &= \mu(\cup(\mathbb{D}_0 \cup \{D \cup D'\})) \\ &= \sum_{\mathbb{F} \subset \mathbb{D}_0 \cup \{D \cup D'\}} \tau(\mathbb{F}) \\ &= \sum_{\mathbb{F} \subset \mathbb{D}_0} \tau(\mathbb{F}) + \sum_{\mathbb{F} \subset \mathbb{D}_0} \tau(\mathbb{F} \cup \{D \cup D'\}) \\ &= \mu(\cup \mathbb{D}_0) + \sum_{\mathbb{F} \subset \mathbb{D}_0} \tau(\mathbb{F} \cup \{D \cup D'\}) \end{aligned} \tag{9}$$

帰納法の仮定より $|\mathbb{F}| < n$ の場合すなわち $\mathbb{F} \neq \mathbb{D}_0$ の場合は次のように (8) を満たす。

$$\tau(\mathbb{F} \cup \{D \cup D'\}) = \tau(\mathbb{F} \cup \{D\}) + \tau(\mathbb{F} \cup \{D'\}) + \tau(\mathbb{F} \cup \{D, D'\})$$

したがって

$$\begin{aligned} (9) &= \mu(\cup \mathbb{D}_0) + \sum_{\mathbb{F} \subsetneq \mathbb{D}_0} \tau(\mathbb{F} \cup \{D\}) + \sum_{\mathbb{F} \subsetneq \mathbb{D}_0} \tau(\mathbb{F} \cup \{D'\}) \\ &\quad + \sum_{\mathbb{F} \subsetneq \mathbb{D}_0} \tau(\mathbb{F} \cup \{D, D'\}) + \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D, D'\}) \end{aligned} \tag{10}$$

(9) の最左辺を基に変形すると，

$$\begin{aligned} (9) &= \mu(\cup \mathbb{D}_0) + \sum_{\mathbb{F} \subsetneq \mathbb{D}_0} \tau(\mathbb{F} \cup \{D\}) + \sum_{\mathbb{F} \subsetneq \mathbb{D}_0} \tau(\mathbb{F} \cup \{D'\}) + \sum_{\mathbb{F} \subsetneq \mathbb{D}_0} \tau(\mathbb{F} \cup \{D, D'\}) \\ &\quad + \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D\}) + \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D'\}) + \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D, D'\}) \end{aligned} \tag{11}$$

(10) と (11) を比較すると

$$\tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D \cup D'\}) = \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D\}) + \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D'\}) + \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D, D'\})$$

を満たすこととなり。 $|\mathbb{D}_0| = n$ の場合にも成り立つことが分かった。 □

命題 3 μ を構成的 k-加法性を持つ集合関数, τ を対応するメビウス変換, $\mu^{[\leq k]}$ を対応する構成測度とするとき，全ての $\mathbb{D} \in \mathcal{D}_k$. に対して，次が成り立つ。

$$\tau(\mathbb{D}) = \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D})),$$

証明 $n = |\mathbb{D}|$. に関する帰納法により示す。$n = 1$ のとき $\mathbb{D} = \{D\}$ と置くと，. τ の定義と構成測度の満たすべき性質から

$$\tau(\mathbb{D}) = \mu(D) = \mu^{[\leq k]}(D^{[\leq k]}) = \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D}))$$

. k 以下の自然数 n に対して $\mathbb{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\} \in \mathcal{D}$ を固定し $n-1$ までの成立を仮定する。(帰納法の仮定).

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_1 &= \{D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}\} \\
\mathbb{D}_2 &= \{D_1, D_2, \ldots, D_{n-2}, D_n\} \\
\mathbb{D}_3 &= \{D_1, D_2, \ldots, D_{n-2}, D_{n-1} \cup D_n\}
\end{aligned}$$

と置くと，命題 2 より，

$$\begin{aligned}
\tau(\mathbb{D}_3) &= \tau(\mathbb{D}_1) + \tau(\mathbb{D}_2) + \tau(\mathbb{D}) \\
\tau(\mathbb{D}) &= \tau(\mathbb{D}_3) - \tau(\mathbb{D}_1) - \tau(\mathbb{D}_2)
\end{aligned}$$

帰納法の仮定より

$$\tau(\mathbb{D}) = \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D}_3)) - \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D}_1)) - \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D}_2))$$

$\Gamma_k(\mathbb{D}_1), \Gamma_k(\mathbb{D}_2) \subset \Gamma_k(\mathbb{D}_3)$ $\Gamma_k(\mathbb{D}_1) \cap \Gamma_k(\mathbb{D}_2) = \emptyset$ であるので，

$$\begin{aligned}
& \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D}_3)) - \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D}_1)) - \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D}_2)) \\
= \; & \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D}_3) \setminus (\Gamma_k(\mathbb{D}_1) \cup \Gamma_k(\mathbb{D}_2))) \\
= \; & \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D}))
\end{aligned}$$

となり，この場合にも成り立つことがわかる。 □

以上の議論より，σ集合体を生成する集合体上での測度の値が，メビウス変換で決定され，メビウス変換は集合関数から一意に定まることから次の定理を得る。

定理 17 構成的な k-加法性を持つ集合関数 μ に対して，構成測度 $\mu^{[\leq k]}$ は $(X^{[\leq k]}, \mathcal{B}^{[\leq k]})$ 上の測度として一意に定まる。 □

4. 定式的 k-加法性 [14]

定式的な意味での k-加法性は [14] において次のように定義された。

定義 18 $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が定式的に k ‐ 加法性 $(k \in \mathbb{N})$ を持つとは対応するメビウス変換 τ が

$$|\mathbb{D}| > k \;\Rightarrow\; \tau(\mathbb{D}) = 0.$$

を満たすこととする。

有限集合上で定義される集合関数に対する k ‐ 加法性を考えると，自然な拡張であると考えられるが,「加法性」の一般化としての性質は次の命題で特徴づけられる。 この性質の証明には 命題 2 が重要な役割をはたしている。

定理 19 μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数，τ を対応するメビウス変換とするとき次は同等である。

(a) μ が定式的な k ‐ 加法性を持つ.

(b) $\mathbb{D} \in \mathcal{D}$ が $|\mathbb{D}| = k+1$ に対して $\tau(\mathbb{D}) = 0.$

(c) $\mathbb{D} \in \mathcal{D},\ |\mathbb{D}| = k-1$ であれば，$A, B \in \mathcal{B}, A \cap B = \emptyset, (A \cup B) \cap (\cup \mathbb{D}) = \emptyset$ であれば

$$\tau(\mathbb{D} \cup \{A \cup B\}) = \tau(\mathbb{D} \cup \{A\}) + \tau(\mathbb{D} \cup \{B\})$$

が成り立つ。

証明 ((a)⇒(b)) は (b) の方が条件が弱いので自明。
((b)⇒(c)) 命題 2 より

$$\tau(\mathbb{D} \cup \{A, B\} = \tau(\mathbb{D} \cup \{A\}) + \tau(\mathbb{D}' \cup \{B\}) + \tau(\mathbb{D} \cup \{A, B\}).$$

$|\mathbb{D} \cup \{A, B\}| = k+1$ より $\tau(\mathbb{D} \cup \{A, B\}) = 0.$ よって

$$\tau(\mathbb{D} \cup \{A, B\} = \tau(\mathbb{D} \cup \{A\}) + \tau(\mathbb{D}' \cup \{B\}).$$

((c)⇒(a)) $|\mathbb{D}| = k+i$ とし，$i \in \mathbb{N}$ であれば $\tau(DD) = 0$ を i に関する帰納法で示す。
$|\mathbb{D}| = k+1$ の時 $\mathbb{D} = \mathbb{D}' \cup \{A, B\}$ $(|\mathbb{D}'| = k-1)$ であるとすると A, B および $\mathbb{D}'$ に属する集合は互いに素になるので,

$$\tau(\mathbb{D} \cup \{A \cup B\}) = \tau(\mathbb{D} \cup \{A\}) + \tau(\mathbb{D}' \cup \{B\}).$$

他方 命題2 より

$$\tau(\mathbb{D} \cup \{A \cup B\}) = \tau(\mathbb{D} \cup \{A\}) + \tau(\mathbb{D}' \cup \{B\}) + \tau(\mathbb{D}' \cup \{A, B\}).$$

上記2式を比較して

$$\tau(\mathbb{D}' \cup \{A, B\}) = \tau(\mathbb{D}) = 0.$$

$|\mathbb{D}|=k+i-1(i\geq 2)$ の時までの成立を仮定するとき, 同様に $|\mathbb{D}|=k+i,\ \mathbb{D}=\mathbb{D}'\cup\{A,B\}$ $(|\mathbb{D}'|=k+i-2)$ であるとすると命題2 より

$$\tau(\mathbb{D}\cup\{A\cup B\})=\tau(\mathbb{D}\cup\{A\})+\tau(\mathbb{D}'\cup\{B\})+\tau(\mathbb{D}'\cup\{A,B\}).$$

帰納法の仮定より

$$\tau(\mathbb{D}\cup\{A\cup B\})=\tau(\mathbb{D}\cup\{A\})=\tau(\mathbb{D}'\cup\{B\})=0$$

よって， $\tau(\mathbb{D}'\cup\{A,B\})=\tau(\mathbb{D})=0.$ □

補題 20 $\mathbb{D}=\{D_1,D_2,\ldots,D_{n-1}\}\in\mathcal{D},\ A,B\in\mathcal{B}$ が

$$(\cup\mathbb{D})\cap A,\ (\cup\mathbb{D})\cap B,\ A\cap B=\emptyset$$

であるとき

$$\Gamma_k(\mathbb{D}\cup\{A\cup B\})=\Gamma_k(\mathbb{D}\cup\{A\})\cup\Gamma_k(\mathbb{D}\cup\{B\})\cup\Gamma_k(\mathbb{D}\cup\{A,B\})$$

と表され，右辺の3つの集合は互いに素である。

注意　$k=n$ のとき $|\mathbb{D}\cup\{A,B\}|=k+1$ なので $\Gamma_k(\mathbb{D}\cup\{A,B\})=\emptyset$ となり次が成り立つ。

$$\Gamma_k(\mathbb{D}\cup\|A\cup B\})=\Gamma_k(\mathbb{D}\cup\{A\}))\cup\Gamma_k(\mathbb{D}\cup\{B\}))$$

証明　$\{x_j\}_{j=1}^n\in\Gamma_k(\mathbb{D}\cup\|A\cup B\})$ は $D_1,\ldots,D_{n-1}$ の要素，および $A\cup B$ の要素を少なくとも一つずつ持つ (複数でもよい)。このとき $D_1,\ldots,D_{n-1}$ の要素を持つことに加えて次の何れかが成り立つ。

(a)　A の要素だけを持つ。

(b)　B の要素だけを持つ。

(c)　A,B の要素を持つ。

これらは同時に成り立つことはなく，それぞれ

$$\Gamma_k(\mathbb{D}\cup\{A\})),\ \Gamma_k(\mathbb{D}\cup\{B\})),\ \Gamma_k(\mathbb{D}\cup\{A,B\})$$

に対応している。よって求める結果を得る。 □

上の補題を用いると次の命題を示すことができる。

命題 4 構成的 k-加法性を持つ集合関数 μ は，定式的 k-加法的でもある。

証明　定理 19 より, τ を μ のメビウス変換とするとき，$\mathbb{D}\in\mathcal{D},\ |\mathbb{D}|=k-1,\ A,B\in\mathcal{B}$, $\cup\mathbb{D}\cap A,\cup\mathbb{D}\cap B,A\cap B=\emptyset$ に対して，

$$\tau(\mathbb{D}\cup\{A\cup B\})=\tau(\mathbb{D}\cup\{A\})+\tau(\mathbb{D}\cup\{B\}).$$

が成り立つことを示せばよい。 構成測度を $\mu^{[\leq k]}$ とおくとき，命題 3 より

$$\begin{aligned}\mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D},\{A\cup B\}) &= \tau(\mathbb{D}\cup\{A\cup B\})\\ \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D},\{A\}) &= \tau(\mathbb{D}\cup\{A\})\\ \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D},\{B\}) &= \tau(\mathbb{D}\cup\{B\})\end{aligned}$$

補題 20 (注意) より互いに素な和として

$$\Gamma_k(\mathbb{D},\{A\cup B\}) = \Gamma_k(\mathbb{D},\{A\})\cup\Gamma_k(\mathbb{D},\{B\})B\}).$$

が成り立つので求める結果を得る。 □

5. 歪測度のk-加法性 [14, 15]

定義 21 $(X,\mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が歪測度であるとは $(X,\mathcal{B})$ 上の正値有限測度 ν と $f(0)=0$ を満たすボレル可測関数 f を用いて $\mu(A)=f(\nu(A))$ と表される事とする。このとき 関数 f を歪関数と呼ぶ。

歪関数 f が単調非減少であるとき，ファジィ測度になる。

補題 22 [14, 15] μ を $(X,\mathcal{B})$ 上の集合関数で歪測度を f とする歪測度であるとする。f が k 次の多項式で $f(0)=0$ を満たせば，μ は構成的かつ定式的に k - 加法性を持つ。

証明 いずれの場合も, k - 加法性は和について閉じているので，有界測度 (確率測度でもよい) ν に対して ν^j $(j\leq k)$ が k - 加法的であることを示せばよい。j-加法的であれば, $j+1$ 加法的であるので，ν^k の k - 加法性を示せば十分。以下それぞれの場合についてこれを示す。

構成的k-加法性 $(X^k,\mathcal{B}^k,\nu^k)$ を k 次の直積測度とする。この時任意の A に対して $\mu(A)=\nu(A)^k=\nu^k(A^k)$ となる。$(x_j)_{j=1}^k\in X^k$ に対して $\{x_j\}_{j=1}^k\in X^{[\leq k]}$ (同じものは取り除き有限集合としたもの) を対応させる写像を ϕ と置くとき $\mu^{[\leq k]}(E)=\nu^k(\phi^{-1}(E))$ により $\mu^{[\leq k]}$ を定めると，$(X^{[\leq k]},\mathcal{B}^{[\leq k]})$ 上の有限測度で $\phi^{-1}(A^{[\leq k]})=A^k$ より $\mu(A)=\mu^{[\leq (]}A^{[\leq k]})$ を満たし，これが構成測度であることがわかる。

定式的k-加法性 上の議論より μ は構成的k-加法性を持つことがわかり，命題 4 より，構成的k-加法性 であれば定式的にもk-加法性である事がわかるので，μ は定式的 k - 加法性を持つ。 □

次のような条件下では, k加法性を持つ歪測度の形をある程度特定することができる。

定義 23 $(X,\mathcal{B})$ 上の非負有限測度 ν が強ダルブー性を持つとは，任意の $\nu(A)>0$ なる $A\in\mathcal{B}$ と $0<t<\nu(A)$ を満たす t に対して $\nu(B)=t$, $B\subset A$ を満たす $B\in\mathcal{B}$ が存在することとする。

補題 24 $n\in\mathbb{N}$, $f:[0,M]\to\mathbb{R}$: n 回連続的微分可能であるとする。

$$\Delta_n f(x,h)=\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{n-\ell}{}_nC_\ell f(x+\ell h)$$

と定めるとき任意の $x\in(0,M)$ に対して次が成り立つ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_n f(x,h)}{h^n}=f^{(n)}(x).$$

証明

$$\Delta_1 f(x,h) = (-1)^1 f(x) - (-1)^0 f(x+h) = \int_0^1 f(x+th)hdt.$$

一般に $j < n$ に対して

$$\begin{aligned}
& \Delta_j f(x+h,h) - \Delta_j f(x,h) \\
= \ & \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^{j-\ell} {}_jC_\ell f(x+h+\ell h) - \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^{j-\ell} {}_jC_\ell f(x+\ell h) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{j+1} (-1)^{j-(\ell-1)} \frac{j!}{(j-(\ell-1))!(\ell-1)!} f(x+\ell h) \\
& + \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^{j+1-\ell} \frac{j!}{(j-\ell)!\ell!} f(x+\ell h) \\
= \ & (-1)^{j+1} \frac{j!}{j!} f(x) + (-1)^0 \frac{j!}{(j!} f(x+(j+1)h) \\
& + \sum_{\ell=1}^{j} (-1)^{j+1-\ell} \left(\frac{j!}{(j+1-\ell)!(\ell-1)!} + \frac{j!}{(j-\ell)!\ell!} \right) f(x+\ell h) \\
= \ & (-1)^{j+1} \frac{j!}{j!} f(x) + (-1)^0 \frac{j!}{j!} f(x+(j+1)h) \\
& + \sum_{\ell=1}^{j} (-1)^{j+1-\ell} \frac{(j+1)!}{(j+1-\ell)!\ell!} f(x+\ell h) \\
= \ & \sum_{\ell=0}^{j+1} (-1)^{j+1-\ell} {}_{j+1}C_\ell f(x+\ell h) \\
= \ & \Delta_{j+1} f(x,h)
\end{aligned}$$

よって，帰納的に

$$\Delta_n f(x,h) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f^{(n)}(x+t_1h+\cdots+t_nh)h^n dt_1 \cdots dt_n$$

を得る。 従って

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_n f(x,h)}{h^n} &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 f^{(n)}(x+t_1h+\cdots+t_nh) dt_1 \cdots dt_n \\
&\to f^{(n)}(x) \quad \text{as } h \to 0.
\end{aligned}$$

となり，求める結果を得る。 □

これを用いると強ダルブー性のある時に 定式的 k - 加法性のある歪測度の形が次のように特徴づけられる。

定理 25 $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が, 強ダルブー性を持つ非負有限測度 ν と $[0, \nu(X)]$ を含む開区間上で k 回連続的微分可能な関数 f を用いて $\mu(A) = f(\nu(A))$ $(A \in \mathcal{B})$ と表されるとき，次は同値。

(a) μ は定式的 k - 加法性を持つ。

(b)　μ は構成的 k - 加法性を持つ。

(c)　f は $f(0)=0$ を満たす k 次 *(*以下*)* の多項式である。

証明　(c) $\Rightarrow$ (b) は 補題 22 で，(b) $\Rightarrow$ (a) は 命題 4 で示したので, (a) $\Rightarrow$ (c) を示せばよい。

f を歪関数, $\Delta_{k+1}f(x,h)$ を補題 24 で定めた関数とするとき，任意の $x \in (0, \nu(X)$ に対して,

$$\lim_{h\to 0}\Delta_k f(x,h)=0$$

を示す。この場合 補題 24 を用いて f が k 次 (以下) の多項式であることがわかる。

任意の $\mathbb{D}=\{D_1,\ldots,D_k,D_{k+1}\}\in\mathcal{D}$ $(|\mathbb{D}|=k+1)$ に対して，補題 5 を用いると,

$$\tau(\mathbb{D})=\sum_{\mathbb{D}'\subset\mathbb{D}}(-1)^{|\mathbb{D}|-|\mathbb{D}'|}\mu(\cup\mathbb{D}')$$

が成り立つ。任意に与えられた $x\in(0,\nu(X))$ に対してと, 任意の $h\in(0,(\nu(X)-x)/k)$ に対して,

$$\nu(D_1)=\cdots=\nu(D_k)=h,\quad \nu(D_{k+1})=x,$$

を満たすように $\mathbb{D}\in\mathcal{D}$ を定めれば,

$$\mu(\cup\mathbb{D}')=f(\nu(\cup\mathbb{D}'))=f(\sum_{D_j\in\mathbb{D}'}\nu(D_j)).$$

定式的 k - 加法性の定義から $\tau(\mathbb{D})=0$ であるので,

$$\sum_{\mathbb{D}'\subset\mathbb{D}}(-1)^{|\mathbb{D}|-|\mathbb{D}'|}f(\sum_{D_j\in\mathbb{D}'}\nu(D_j))=0$$

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\mathbb{D}'\subset\mathbb{D}\setminus\{D_{k+1}\}}\Big((-1)^{k+1-(|\mathbb{D}'|+1)}f(x+|D_j|h)+(-1)^{k+1-(|\mathbb{D}'|)}f(|D_j|h)\Big)\\
&= \sum_{j=0}^{k}{}_kC_j\left((-1)^{k-j}f(x+jh)-(-1)^{k-j)}f(jh)\right)\\
&= \Delta_k f(x,h)-\Delta_k f(0,h)
\end{aligned}$$

よって任意の x,h に対して $\Delta_k f(x,h)=\Delta_k f(0,h)$ を得た。 補題24 により $h\to 0$ のとき $f^{(k)}(x)=f^{(k)}(0)$ を得ることになり，$f^{(k)}$ が定数となるので，f は k 次以下の多項式であることがわかる。 □

6. 2つの k-加法性の同等性 [15]

集合関数が 構成的に k - 加法的であれば，定式的な k - 加法性を持つことは 命題 4 で示した。歪測度の場合は一定の条件下で同等であるともいえる。

一般的には定式的な k - 加法性をもつ集合関数が，構成的 k - 加法性を持つためには，連続的な拡張に関するいくつかの条件を課す必要がある。この証明は [15] で示しているが，その時点では [12] で示した，構成測度の一意性の議論がされておらず，本稿で設定した $\mathcal{A}_k$ が集合体であることや，Γ_k の構成測度に対する値が，メビウス変換であ

ることなどはこの時点では示されていない。これらが得られた後で見直すと，この性質は拡張定理で必要となるいくつかの条件を課すことで得られる事がわかる。
　構成測度は有限測度であることを仮定しているので，次の条件が必要となる。

定義 26 (全有界性)　$(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が k 次の全有界性を持つとは

$$\sup_{\{\Gamma_k(\mathbb{D}_j)\}_{j=1}^n \in \mathcal{A}_k} \sum_{j=1}^n |\tau(\mathbb{D}_j)| < \infty$$

を満たすこととする。

また，測度の拡張に必要な 有限加法族としての σ-加法性を次のように表現する。

定義 27 ($\emptyset$ における精密連続性)　$(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が ($\emptyset$ における) k 次の精密連続性を持つとは，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\{\Gamma(\mathbb{D}_j^{(n)})\}_{j=1}^m(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ が $A_n \searrow$ をみたすとき

$$\sum_{j=1}^{m(n)} \tau(\mathbb{D}_j^{(n)}) \to 0, \quad (\text{as } n \to \infty)$$

を満たすこととする。

このときカラテオドリの拡張定理をもちいると次の定理を得る。

定理 28 $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が次の条件を満たすとき構成的な k - 加法性を持つ。

(a) μ は定式的な k - 加法性を持つ。

(b) μ は k 次の全有界性を持つ。

(c) μ は k 次の精密連続性を持つ。

7. 強零集合と補填測度 [12]

集合関数が与えられていて，それを基礎とした関数の解析を行う場合，しかるべき尺度が必要になる。具体的には測度の場合の L_p ノルムのようなものを考えたいが，対象となる集合関数は，加法性や単調性もなく，何らかの工夫が必要となる。この節では構成的 k - 加法性を持つ集合関数が与えられたとき，対応する強零集合に着目し，それに適した解析の基を模索する。
　まず，ジョルダン分解を用いた測度の絶対値に相当するものを設定する。

定義 29 μ を構成的な k-加法性を持つ $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数とし，$\mu^{[\le k]}$ を対応する構成測度とする。. この時 ジョルダン分解の意味での測度の絶対値 $\left|\mu^{[\le k]}\right|$ を用いて補填測度 $\bar{\mu}(A)$ を次で定める。

$$\bar{\mu}(A) = \left|\mu^{[\le k]}\right| (\Gamma_k(A, A^c) \cup A^{[\le k]}).$$

補填測度 (一般に加法性を持つわけではない) は次の性質を満たす。

補題 30 μ を構成的な k-加法性を持つ $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数とし，$\bar{\mu}$ を対応する補填測度とする。.

(a) $\bar{\mu}$ は短調で，劣加法的である。

$$\cdot \quad A \subset B \ (A, B \in \mathcal{B}) \ \Rightarrow \ \bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B),$$
$$\cdot \quad \bar{\mu}(A \cup B) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{B}$$

(b) $\bar{\mu}$ は上下からの連続性がある。

$$\cdot \quad A \searrow A \quad \text{in } \mathcal{B} \ \Rightarrow \ \bar{\mu}(A_n) \searrow \bar{\mu}(A).$$
$$\cdot \quad A \nearrow A \quad \text{in } \mathcal{B} \ \Rightarrow \ \bar{\mu}(A_n) \nearrow \bar{\mu}(A).$$

証明　単調性は定義より自明。列加法性を示すために，任意の互いに素な $A, B \in \mathcal{B}$ に対して

$$(A \cup B)^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(A \cup B, (A \cup B)^c) \subset A^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(A, A^c) \cup B^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(B, B^c)$$

が成り立つことを示す。

$\{x_j\}_{j=1}^m \in (A \cup B)^{[\leq k]}$ とすると，つぎの 1 - 3 のどれかが成り立つ。

1. $\{x_j\}_{j=1}^m \subset A \quad (\{x_j\}_{j=1}^m \in A^{[\leq k]})$.
2. $\{x_j\}_{j=1}^m \subset B \quad (\{x_j\}_{j=1}^m \in B^{[\leq k]})$.
3. $\{x_j\}_{j=1}^m \cap A \neq \emptyset$ and $\{x_j\}_{j=1}^m \cap B \neq \emptyset \quad (\{x_j\}_{j=1}^m \in \Gamma_k(A, B) \subset \Gamma_k(A, A^c))$.

$\{x_j\}_{j=1}^m \in \Gamma_k(A \cup B, (A \cup B)^c)$ であるときには，次の 4，5 の両方が成り立つ。

4. $\{x_j\}_{j=1}^m \cap A \neq \emptyset$ or $\{x_j\}_{j=1}^m \cap B \neq \emptyset$.
5. $\{x_j\}_{j=1}^m \cap (A^c \cap B^c) \neq \emptyset$.

$\{x_j\}_{j=1}^m \cap A \neq \emptyset$ であれば, $\{x_j\}_{j=1}^m \cap (A^c \cap B^c) \neq \emptyset$ なので，$\{x_j\}_{j=1}^m \in \Gamma_k(A, A^c)$ をみたす。同様に $\{x_j\}_{j=1}^m \cap B \neq \emptyset$ であれば$\{x_j\}_{j=1}^m \in \Gamma_k(B, B^c)$ がなりたつ。．したがって,

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(A \cup B) &= \left|\mu^{[\leq k]}\right| (\Gamma_k(A \cup B, (A \cup B)^c) \cup (A \cup B)^{[\leq k]}) \\
&\leq \left|\mu^{[\leq k]}\right| (A^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(A, A^c)) + \left|\mu^{[\leq k]}\right| (B^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(B, B^c)) \\
&= \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B).
\end{aligned}$$

上下からの連続性については，補填測度が (σ-加法的な) 測度を用いて定義されていることから明らか。 □

メビウス変換は測度の構成と密接な関係があることが示されてきたが，強零集合でないことの十分条件も次のように与えることができる。

命題 5 μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数で，τ を対応するメビウス変換とするとき $\mathbb{D} = \{D_1, \cdots, D_n\} \in \mathcal{D}_k$ が $\tau(\mathbb{D}) \neq 0$ をみたせば, 任意の $j \leq n$ に対して D_j は強零集合ではない。

証明　一般性を失うことなく，D_1 が強零集合でないことを示せばよい。

$\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}$ となる $\mathbb{D}'$ で $D_1 \in \mathbb{D}'$ かつ $\tau(\mathbb{D}') \neq 0$ となるもの中の $|\mathbb{D}'|$ の最小値を $m \leq n$ とし，それを実現する $\mathbb{D}'$ を一つ固定する。

$$D^* = (\cup \mathbb{D}') \setminus D_1 = \bigcup_{Dj \in \mathbb{D}', j \neq 1} D_j.$$

とおくと

$$\mu(D^*) = \sum_{\mathbb{D}'' \subset \mathbb{D}' \setminus \{D_1\}} \tau(\mathbb{D}'').$$

$$\begin{aligned} \mu(D_1 \cup D^*) &= \sum \mathbb{D}'' \subset \mathbb{D}' \tau(\mathbb{D}'') \\ &= \sum \mathbb{D}'' \subset \mathbb{D}' \setminus \{D_1\} \tau(\mathbb{D}'') \\ &\quad + \sum \mathbb{D}'' \subset \mathbb{D}' \setminus \{D_1\} \tau(\mathbb{D}'' \setminus \{D_1\}) \end{aligned}$$

最後の行の第 2 項は $\tau(\mathbb{D}')$ ($\mathbb{D}'' \cup \{D_1\} = \mathbb{D}'$) 以外は $|\mathbb{D}'' \cup \{D_1\}| < m$ となるので 0 となる。 したがって

$$\mu(DD_1 \cup D^*) = \mu(D^*) + \tau(\mathbb{D}') \neq \mu(D^*)$$

となるので D_1 は強零集合ではない。 □

構成的 k-加法性を持つ集合関数の強零集合は先に定めた 補填測度を用いて次のように条件づけられる。

定理 31 μ を構成的 k-加法性を持つ集合関数，$\bar{\mu}$ を対応する補填測度とする。このとき A が強零集合であることと $\bar{\mu}(A) = 0$ であることとが同値である。

証明　$A \in \mathcal{B}$ が

$$\bar{\mu}(A) = \left|\mu^{[\leq k]}\right| (A^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(A, A^c)) = 0$$

を満たすとする。

$B \in \mathcal{B}$ を任意の可測集合 $C \in \mathcal{B}$, $C \subset A$ を任意の A の可測部分集合とする。. A が強零であることを示す目的では $C \cap B = \emptyset$ として一般性を失わない。

$$\begin{aligned} |\mu(B \cup C) - \mu(B)| &= \left|\mu^{[\leq k]}((B \cup C)^{[\leq k]}) - \mu^{[\leq k]}(B^{[\leq k]})\right| \\ &= \left|\mu^{[\leq k]}(B^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(B, C) \cup C^{[\leq k]}) - \mu^{[\leq k]}(B^{[\leq k]})\right| \\ &= \left|\mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(B, C) \cup C^{[\leq k]})\right| \\ &\leq \left|\mu^{[\leq k]}\right| (\Gamma_k(B, C) \cup C^{[\leq k]}) \\ &\leq \left|\mu^{[\leq k]}\right| (\Gamma_k(A, A^c) \cup A^{[\leq k]}) = 0 \end{aligned}$$

より A が強零であることがわかる。

逆に $\bar{\mu}(A) = \left|\mu^{[\leq k]}\right| (A^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(A, A^c)) > 0.$ を仮定する。このとき $\left|\mu^{[\leq k]}\right| (A^{[\leq k]}) > 0$ もしくは $\left|\mu^{[\leq k]}\right| (\Gamma_k(A, A^c)) > 0$ が成り立つ。ここで，次のような 2 つの測度を考える。ひとつは $\left|\mu^{[\leq k]}\right|$ を $A^{[\leq k]}$ に制限したもので，もう一つは $\mathbb{D} \in \mathcal{D}_{k-1}(A^c)$ に対して，

$$\nu(\Gamma_{k-1}(\mathbb{D})) = \left|\mu^{[\leq k]}\right| (\Gamma_k(A, \mathbb{D}))$$

により定めた測度である。これらの測度に対して $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}^{[\leq k]}$ を生成する集合体であるが,

$\mu^{[\leq k]}(A^{[\leq k]})$, $\mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(A, A^c))$ が全て 0 であれば，これらの測度は恒等的に 0 となり，$\bar{\mu}(A) = \left|\mu^{[\leq k]}\right|(A^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(A, A^c)) > 0$ に反する。よって，$\left|\mu^{[\leq k]}\right|(\Gamma_k(\mathbb{D})) \neq 0.$ を満たす $\mathbb{D} = \{A, D_1, \ldots, D_n\} \in \mathcal{D}_k$ が存在することになり，命題 5 より，A 強零ではないことが分かる。 □

続いて積分との関係について述べる。$(X, \mathcal{B})$ 上の非負可測関数 f に対して，分布関数 $\rho_f(r)$ を $\rho_f(r) = \mu(\{x : f(x) > r\})$ と定め，これを用いて，ショケ積分は次で定められていた。

$$\int^{\mathrm{ch}} f d\mu = \int_0^\infty \rho_f(r) dr.$$

パン積分は次で定義される。

定義 32 (Q. Yang [20])
μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の単調な集合関数，f を $(X, \mathcal{B})$ 上の非負可測関数とする 。このとき パン積分 $\int^{\mathrm{pan}} f d\mu$ は次で定義される。

$$\begin{aligned}\int^{\mathrm{pan}} f d\mu \quad = \quad \sup \Bigg\{ & \sum_{j=1}^n a_j \mu(D_j) : \{D_j\}_{j \leq n} : \ X \text{ の分割 }, a_j \geq 0, \\ & (j \leq n < \infty), \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{D_j}(x) \leq f(x), \ \forall x \in X \Bigg\}.\end{aligned}$$

ここに $\sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{D_j}(x)$ の形の関数を単関数とよび，$\sum_{j=1}^n a_j \mu(D_j)$ を単関数に対する基本和と呼ぶ。

ファジィ測度に関するショケ積分, パン積分では関数を必ずしもうまく分離できない。次の例はその状況を示している。

例 33 $X = \{a, b\}$ とし, 単調な非負集合関数 μ を次で定める。

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0, \quad \mu(\{a, b\}) = 1.$$

このときメビウス変換は次のようになる。

$$\tau(\{a\}) = \tau(\{b\}) = 0, \quad \tau(\{a, b\}) = \tau(\{a\}, \{b\}) = 1.$$

関数 f を次で定める。

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 0.$$

この時 分布関数は次で定める。

$$\rho_f(r) = \mu(\{x : f(x) > r\}) = \mu(\{a\}) \text{ or } \mu(\emptyset) = 0.$$

よって,

$$\int^{\mathrm{ch}} f d\mu = \int_0^\infty \rho_f(r) dr = 0.$$

この場合，f 以下になる単関数は本質的に次の 2 つとなる。

$$0 \times \mathbf{1}_{\{a,b\}}, \quad 1 \times \mathbf{1}_{\{a\}} + 0 \times \mathbf{1}_{\{b\}}.$$

このとき単関数の基本和は

$$0 \times \mu(\{a,b\}) = 0, \quad 1 \times \mu(\{a\}) + 0 \times \mu(\{b\}) = 0.$$

となるので，

$$\int^{\mathrm{pan}} f d\mu = \max\{0 \times \mu(\{a,b\}), 1 \times \mu(\{a\}) + 0 \times \mu(\{b\})\} = 0.$$

これらにより，双方とも積分値は 0 になるが，f は $\{a\}$ 上で $f \neq 0$ ($\{x : f(x) \neq 0\} = \{a\}$) となる。

$$\mu(\{b\}) = 0 \neq 1 = \mu(\{a,b\}) (= \mu(\{b\} \cup \{a\})).$$

従って $\{x : f(x) \neq 0\}$ は強零集合ではない。

よってショケ積分やパン積分での L_p ノルム(測度ではないのでノルムと呼んでよいかどうか微妙ではあるが) によって，強零ではない集合上で食い違う 0 と f を分離することはできない。

次に 補填測度 $\bar{\mu}$ に関するショケ積分による L^p-空間について考察する。

命題 6 μ を構成的な k-加法性を持つ集合関数，$\mu^{[\leq k]}$ を対応する構成測度，$\bar{\mu}$ を補填測度とする。このとき 非負可測関数 f に対して次が成り立つ。

$$\left|\mu^{[\leq k]}\right| (\{\omega : \max_{x \in \omega} f(x) > r\}) = \bar{\mu} (\{x : f(x) > r\}).$$

証明　補填測度は $\bar{\mu}(A) = \left|\mu^{[\leq k]}\right| \left(A^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(A, A^c)\right)$ $(A \in \mathcal{B})$. と定められているので，次を示せばよい。

$$\begin{aligned} & \left\{\{x_j\}_{j=1}^m : m \leq k, \max_{j \leq m} f(x_j) > r\right\} \\ = \ & \{x : f(x) > r\}^{[\leq k]} \cup \Gamma_k (\{x : f(x) > r\}, \{x : f(x) > r\}^c), \end{aligned}$$

$\{x_j\}_{j=1}^m$ が

$$\max_{j \leq m} f(x_j) > r$$

を満たすことと $f(x_j) > r$ を満たす $j \leq m$ が存在することとが同値である。後者のとき，. 全ての $j \leq m$ で $f(x_j) > r$ となるか，$f(x_{j_1}) > r$ となる j_1 と $f(x_{j_2}) \leq r$ となる j_2 の両方が存在するかのどちらかであるので，

$$\{x_j\}_{j \leq m} \in A^{[\leq k]} \cup \Gamma_k(\{x : f(x) > r\}, \{x : f(x) > r\}^c),$$

となり求める結果を得る。 □

定理 34 μ を構成的 k-加法性を持つ集合関数，$\bar{\mu}$ を対応する補填測度とする。

$$\|f\|_{p,ch} = \{\int^{\mathrm{ch}} |f|^p d\bar{\mu}\}^{\frac{1}{p}},$$

$$L_{ch}^p = L_{ch}^p(d\bar{\mu}) = \{f : \|f\|_{p,ch} < \infty\}, \quad (p \geq 1)$$

とするとき，次が成り立つ。

(a)　$(L^p_{ch}(d\bar{\mu}), \|\cdot\|_{p,ch})$ はバナッハ空間。.

(b)　*2* つの関数 $f, g \in L^p_{ch}$ は $\{x : |f(x) - g(x)| > 0\}$ が強零集合のとき同一視される。

証明　(a)　$\bar{\mu}$ をこれまで同様，ある 構成的な k-加法性を持つ集合関数の補填測度とする。これは単調で列加法的な上下に連続性を持つ集合関数であることが補題 30 で示されている。命題 6 より，

$$\rho_{|f|^p}(r) = \bar{\mu}(\{x : |f(x)|^p > r\}) = \left|\mu^{[\leq k]}\right|(\{\omega : \max_{x\in\omega} |f(x)|^p > r\}).$$

さらに，

$$\|f\|^p_{p,\mathrm{ch}} = \int^{\mathrm{ch}} |f|^p d\bar{\mu} = \int \max_{x\in\omega} |f(x)|^p d\left|\mu^{[\leq k]}\right| = \|\max_{x\in\omega} |f(x)|\|^p_{L^p(d\left|\mu^{[\leq k]}\right|)}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{p,\mathrm{ch}} &= \left\{\int \max_{x\in\omega} |f(x)+g(x)|^p d\left|\mu^{[\leq k]}\right|\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left\{\int \left(\max_{x\in\omega} |f(x)| + \max_{x\in\omega} |g(x)|\right)^p d\left|\mu^{[\leq k]}\right|\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left\{\int \left(\max_{x\in\omega} |f(x)|\right)^p d\left|\mu^{[\leq k]}\right|\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int \left(\max_{x\in\omega} |g(x)|\right)^p d\left|\mu^{[\leq k]}\right|\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{p,\mathrm{ch}} + \|g\|_{p,\mathrm{ch}}.
\end{aligned}$$

明らかに $\|af\|_{p,\mathrm{ch}} = |a|\|f\|_{p,\mathrm{ch}}$ $(a \in \mathbb{R})$, であるので $\|\cdot\|_{p,\mathrm{ch}}$ は適当な同値類の上でのノルム担っている。$\bar{\mu}$ は単調，劣加法的，上下に連続であるので，[21] Corollary 6.7 を用いると完備であることもわかる.

(b)　この空間では次の条件を満たすとき 2 つの関数 f, g は同一視される。

$$\left|\mu^{[\leq k]}\right|(\{\omega | \max_{x\in\omega} |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0,$$

これは $\bar{\mu}(\{x : |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0$ と同等である．定理 31 により，これは
$\{x : |f(x) - g(x)| > 0\}$ が強零集合であることと同値である。 □

次の命題は [22](Y. Ouyang, R. Mesiar) で示されている**証明**的な場合のパン積分の線形性と, [23] で示されている単調増加収束定理より容易に導くことができる。ここでの証明ではそのあらすじを述べる。

命題 7　ν を単調，劣加法的，上下に連続な集合関数であるとする。新たな集合関数 $\nu^*(: \mathcal{B} \to [0,\infty])$ を

$$\nu^*(A) = \int^{\mathrm{pan}} \mathbf{1}_A d\nu.$$

により定義するとき，$\nu^*(X) < \infty$ であれば，$\nu^*(A)$ は $(X, \mathcal{B})$ 上 σ-加法的な有限測度である。

証明　ν が劣加法的な単調測度でるとき，$(X,\mathcal{B})$ 上の f,g が非負可測関数であるとき，

$$\int^{\mathrm{pan}}(f+g)d\nu=\int^{\mathrm{pan}}fd\nu+\int^{\mathrm{pan}}gd\nu.$$

が成り立つ(自明に成り立つ正のスカラー倍と合わせ，これを線形性という) ことは [22] で示されている。

$A,B\in\mathcal{B}$ を任意の互いに素な可測集合とするとき，

$$\mathbf{1}_{A\cup B}(x)=\mathbf{1}_A(x)+\mathbf{1}_B(x),\quad \forall x\in X.$$

よって，有限加法性は次のように導かれる。

$$\begin{aligned}\nu^*(A\cup B) &= \int^{\mathrm{pan}}\mathbf{1}_{A\cup B}d\nu\\ &= \int^{\mathrm{pan}}\mathbf{1}_A(x)d\nu+\int^{\mathrm{pan}}\mathbf{1}_Bd\nu\\ &= \nu^*(A)+\nu^*(B).\end{aligned}$$

$\{A_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}$ を互いに素な可測集合列とする。このとき $f_n(x)=\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{n}A_j}(x)$，$(n\in\mathbb{N})$ で定まる関数列は単調増加で $f_\infty(x)=\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j}$ に収束する。よって，パン積分の単調増加収束定理より求める結果を得る。この性質はおそらく良く知られているものと考えられるが一般化した形での証明が [23] で確認できる。また，通常の証明は [24] に記載している。このとき，

$$\nu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)=\int^{\mathrm{pan}}\lim_{n\to\infty}f_nd\nu=\lim_{n\to\infty}\int^{\mathrm{pan}}f_nd\nu=\sum_{j=1}^{\infty}\nu(A_j).$$

となり，ν^* の σ-加法性を得る．　□

定理 35 ν を $(X,\mathcal{B})$ 上の劣加法的な単調測度で，上下の連続性を持つとする。ν^* を命題 *7* で定めた測度とし，$\nu^*(X)<\infty$ であるとする．このとき, $(X,\mathcal{B})$ 上の任意の非負可測関数 f に対して，

$$\int^{\mathrm{pan}}fd\nu=\int^{\mathrm{pan}}fd\nu^*\ \left(=\int fd\nu^*\right)$$

が成り立つ。

証明　$n,j\in\mathbb{N}$ に対して，

$$D_j^{(n)}=\left\{x\,\middle|\,f(x)\in\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right)\right\}.$$

と置く。 f を任意の非負可測関数とする。

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\inf_{x\in D_j^{(n)}}f(x)\mathbf{1}_{D_j^{(n)}}(x).$$

このとき $f_n(x) \nearrow f(x)$, $\forall x \in X$ をみたすので，単調増加収束定理(既出 [23, 24]) を用いて，

$$\lim_{n\to\infty} \int^{\mathrm{pan}} f_n d\nu^* = \int^{\mathrm{pan}} f d\nu^*.$$

を得る。したがって，任意の $\varepsilon > 0$ (発散する場合は任意の $M > 0$) に対して, $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば $n \geq N$ のとき $\int^{\mathrm{pan}} f d\nu^* - \int^{\mathrm{pan}} f_n d\nu^* < \varepsilon$ (発散する場合 $n \geq N \Rightarrow \int^{\mathrm{pan}} f_n d\nu * > M$) を満たす。

命題 7 より，ν^* は加法的測度であるから，単関数 $\sum_{j=1}^{N(n)} a_j \mathbf{1}_{D_j^{(n)}}$ を

$$\int f_n d\nu^* - 2\varepsilon \leq \sum_{j=1}^{N(n)} a_j \nu^*(D_j^{(n)}), \ \left(\text{or } \frac{M}{2} \leq \sum_{j=1}^{N(n)} a_j \nu^*(D_j^{(n)}), \right)$$

を満たすように取る。 そのとき $\{D_j^{(n)}\}_{j=1}^{N(n)}$ は X の分割で $a_j = \inf_{x\in D_j^{(n)}} f(x)$ であるとしてよい。一般に $D \in \mathcal{B}$ と任意の $\varepsilon' > 0$ に対して D の 分割 $\{U_\ell\}_{\ell=1}^{L}$ を

$$\nu^*(D) - \varepsilon' \leq \sum_{\ell=1}^{L} \nu(U_\ell).$$

を満たすことが出来るので，分割 $\{D_i'\}_{i=1}^{I}$ を取り直して

$$\int f_n d\nu^* - 3\varepsilon \leq \sum_{i=1}^{I} a_i \nu(D_i'), \quad \sum_{i=1}^{I} a_i \mathbf{1}_{D_i'}(x) \leq f.$$

発散する場合は

$$\frac{M}{3} \leq \sum_{i=1}^{I} a_i \nu(D_i'), \quad \sum_{i=1}^{I} a_i \mathbf{1}_{D_i'}(x) \leq f.$$

を満たすようにとることができる。 従って

$$\int f_n d\nu^* - 3\varepsilon \leq \int^{\mathrm{pan}} f d\mu, \ \left(\text{or } \frac{M}{3} \leq \int^{\mathrm{pan}} f d\mu \right).$$

$\varepsilon > 0$ は任意に小さくできるので ($M > 0$ は任意に大きくできるので) $\int f_n d\nu^* = \int^{\mathrm{pan}} f_n d\nu^* \leq \int^{\mathrm{pan}} f d\mu$ が成り立つ。

他方任意の単関数に対して:

$$\sum_{j=1}^{J} a_j \nu(D_j) \leq \sum_{j=1}^{J} a_j \nu^*(D_j)$$

であるので $\int^{\mathrm{pan}} f d\nu \leq \int^{\mathrm{pan}} f d\nu *$ となり求める結果を得る。 □

以上の議論で次の補題を得る。この性質は， [22]. で示されている。

補題 36 ν を単調，劣加法的，上下に連続な集合関数であるとき，$p \geq 1$ に対して

$$\|f\|_{p,\mathrm{pan}} = \left\{ \int^{\mathrm{pan}} |f|^p d\nu \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad L^p_{\mathrm{pan}} = \{f : \|f\|_{p,\mathrm{pan}} < \infty\},$$

従って L^p_{pan} バナッハ空間になる. □

さらに，$p > 1$ であれば $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ なる $q > 0$ に対して， ${L^p_{\mathrm{pan}}}^* = L^q_{\mathrm{pan}}$ を満たす。

8. 構成的集合関数と歪測度 [16]

定義 37 X の有限部分集合全体を次で定める。

$$X^{[*]}=\left\{\{x_j\}_{j=1}^n : n\in\mathbb{N},\ x_j\in X,\ j\le n\right\},$$

また $A\in\mathcal{B}$ に対して

$$A^{[*]}=\left\{\{x_j\}_{j=1}^n : n\in\mathbb{N},\ x_j\in A,\ j\le n\right\}\subset X^{[*]}.$$

と定める。

$$\mathcal{B}^{[*]}=\sigma\left(\left\{A^{[*]} : A\in\mathcal{B}\right\}\right)$$

とする。 このとき $\left(X^{[*]},\mathcal{B}^{[*]}\right)$ を抽出空間という。

$(X,\mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が, 抽出空間 $\left(X^{[*]},\mathcal{B}^{[*]}\right)$ の符号付有限測度 $\mu^{[*]}$ を用いて

$$\mu(A)=\mu^{[*]}\left(A^{[*]}\right),\quad \forall A\in\mathcal{B}.$$

と表されるとき μ を構成的集合関数という。

$\mu^{[*]}$ は $\mu^{[\le k]}$ に対して $k\to\infty$ としたものである。

歪測度の場合の十分条件として次のような性質が成り立つ。

定理 38 $(X,\mathcal{B})$ を可測空間, μ を $(X,\mathcal{B})$ 上に定義される歪測度, ν, f を対応する有限測度と歪関数とする。f が次のように与えられる解析的関数で

$$f(t)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j t^j,\quad a_j\in\mathbb{R},$$

$\nu(X)=M$ に対して

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\,M^j<\infty.$$

を満たすとする場合, μ は構成的集合関数である。

証明 $A\in\mathcal{B}$ に対して $\mu^{[k]}$ を

$$\mu^{[k]}(A^{[k]})=\nu(A)^k$$

と定める。一般的な抽出空間においても $\mathcal{A}$ を同様に定義すれば, $\mathcal{B}^{[*]}$ を生成する集合体である。この定義により $\mu^{[k]}$ は $\mathcal{A}$ 上に定義されたことになる。(この集合関数の値はメビウス変換により決定されると考えてよいが, その場合の集合ごとの値が上の式で決まったことになる。) ν^j を X^j 上の直積測度とし, 自然に $\mathcal{B}^{[j]}\subset\mathcal{B}^j$ 上に制限したものと考えるものとする。. このとき

$$\mu^{[\le k]}(A^{[\le k]})=\sum_{j=1}^{k}a_j\nu^j(A^j).$$

と定められたことになる。

仮定より，この極限として次のように定めることができる。

$$\mu^{[*]}(A^{[*]}) = \lim_{k\to\infty} \mu^{[k]}(A^{[k]}).$$

このとき，明らかに有限加法的である。

したがって， $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ が $D_m \searrow$ ($m \to \infty$) であるとき, $\mu^{[*]}(D_m) \searrow 0$ ($m \to \infty$) であることを示せば十分である。

$\varepsilon > 0$ を任意の正の数とするとき，任意の $D \in \mathcal{A}$ に対して，次を満たすように N を定めることができる。

$$n \geq N \Rightarrow \left|\mu^{[*]}(D) - \mu^{[k]}(D \cap X^{[k]})\right| < \varepsilon$$

これは上の値が，0 に収束する $\displaystyle\sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| M^j$ 以下になることからわかる。. $\mu^{[k]}$ 有限測度なので

$$\lim_{m\to\infty} \mu^{[k]}(D_m \cap X^{[k]}) = 0.$$

したがって

$$\limsup_{m\to\infty} \left|\mu^{[k]}(D_m \cap X^{[k]})\right| \leq \varepsilon.$$

以上よりカラテオドリの拡張定理 ([25]）より求める結果を得る。□つづいて，構成的集合関数から有限次元要素を抽出する事について考える。抽出空間は有限部分集合の集まりの上の測度を用いて表現されているので，個数を固定した部分集合族の影響を抽象的には表現することができる。ここでは，それを元の集合関数を用いて表現することを考える。

まず，構成的集合関数 μ の有限次元要素を定める。

定義 39 μ を構成的集合関数， $\mu^{[*]}$ を対応する構成測度とする。このとき $A \in \mathcal{B}$ の k 次元要素 $\mu_k(A)$ を次で定める。

$$\mu_k(A) = \mu^{[*]}(A^{[*]} \cap X^{[k]}).$$

次の性質は，初歩的な性質であるが，この性質の本質を説明しているので，ここで特筆しておく。

命題 8 可測空間 $(X, \mathcal{B})$ を考える。$\mathcal{B}$ は可算生成とする。このとき次の (1) - (3) は同等。

(1) 全ての一点集合 $\{x\}$ $(x \in X)$ が可測である。

(2) 任意の $x, y \in X$ $(x \neq y)$ に対して, $x \in A$, $y \notin A$ を満たす $A \in \mathcal{B}$ がある。

(3) 次を満たすような有限分割列

$$\{\mathbb{D}_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\{D_j^{(n)}\}_{j=1}^{N(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

がとれる。

(3-1)　任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{D}_{n+1}$ は $\mathbb{D}_n$ の細分である。.

(3-2)　$\mathcal{B} = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{D}_n\right)$.

(3-3)　任意の $x, y \in X$ $(x \neq y)$, に対して，番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq n_0$ なるすべての n に対して, $x \in D_j^{(n)}$, $x \in D_\ell^{(n)}$ を満たすように, $j, \ell \leq N(n)$, $j \neq \ell$ を決めることができる。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2)　$A = \{x\} \in \mathcal{B}$ とすれば $x \in A$ and $y \notin A$ を満たす。

(3) $\Rightarrow$ (1)　$x \in X$ として固定する。全ての $n \in \mathbb{N}$ にたいして $j(n) \leq N(n)$ $x \in D_{j(n)}^{(n)}$.

(3-3) を仮定しているので，$y \neq x$ であれば，十分大きな n に対して $y \notin D_{j(n)}^{(n)}$ であるので,

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_{j(n)}^{(n)},$$

となるが，右辺は可測集合である。

(2) $\Rightarrow$ (3)　$\mathcal{B}$ は可算生成なので, 加算個からなる可測集合 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathcal{B} = \sigma\left(\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ を満たすように設定できる.

一般に集合 A に対して，$A_n^{(0)} = A$ および $A_n^{(1)} = A^c$, と表記することにする。

$$\Delta_n = \left\{\bigcap_{j=1}^{n} A_j^{(i_j)} : (i_j)_{j=1}^n \in \{0,1\}^n\right\}$$

一般的には空集合がいくつか含まれることになるので，それらを取り除いて Δ_n には空集合は属さないようにする。この場合 $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は (3-1) and (3-2) を満たすことになる。.

(3-3) が成り立たないとすると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{x, y\} \subset A$ を満たすように $A \in \Delta_n$ を定めることができる。$\alpha = \{x, y\}$ として (2 点を同一視する) $\widetilde{X} = X \setminus \{x, y\} \cup \{\alpha\}$ とし，$A \in \Delta_n$ $(n \in \mathbb{N})$ の集合でも $\{x, y\} \subset A$ であれば，$\widetilde{A} = A \setminus \{x, y\} \cup \{\alpha\}$ とする。このとき 上の仮定より, $\{x, y\}$ の片方だけが含まれることはない。

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{B}} &= \sigma\left(\bigcup_n \Delta_n\right) \\ \phi(\omega) &= \begin{cases} \omega & \omega \neq a, b \\ \alpha & \omega = a, \text{or } b \end{cases} \end{aligned}$$

とおくと $\mathcal{B} = \phi^{-1}(\widetilde{\mathcal{B}})$ となり x, y を分離することはできない。 □

これを用いて次の定理を得る。

定理 40 $(X, \mathcal{B})$ を可算生成な可測空間，μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の構成的集合関数，$\mu^{[*]}$ を対応する構成測度 とする。全ての一点集合が $\{x\} \in \mathcal{B}$ を満たすとき，補題 *8* で定めた集合列，$\left\{\Delta_n = \left\{D^{(n)}{}_j\right\}_{j=1}^{N(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して,

$$\mu^{[1]}(A^{[*]}) = \mu^{[*]}(A^{[*]} \cap X^{\langle 1\rangle}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N(n)} \mu(D_j^{(n)} \cap A)$$

が成り立つ。

証明　$A \in \mathcal{B}$ に対して,

$$E_n = \bigcup_{j=1}^{n} (A \cap D_j^{(n)})^{[*]}.$$

と定め，$X^{[*]}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次で定める。

$$f_n(U) = 1_{E_n}(U).$$

各 $U = \{x_\ell\}_{\ell=1}^{L} \in \left(A \cap D_j^{(n)}\right)^{[*]}$, $|U| = L > 1$ を考えるとき，次を満たすように $N \in \mathbb{N}$ を取ることができる。

$$n \geq N \Rightarrow \{x_1, x_2\} \not\subset D_j^{(n)},\ \forall j \leq N(n).$$

これは任意の $n \geq N$ に対して $U \notin E_n$ であることを意味する。明らかに $x \in A$ であれば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{x\} \in \bigcup_{j \leq N(n)} \left(A \cap D_j^{(n)}\right)^{[*]}$ をみたす。 従って全ての $U \in X^{[*]}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} 1_{E_n}(U) = 1_{A \cap X^{[1]}}(U),$$

が成り立つ。他方

$$\int 1_{E_n}(U)\mu^{[*]}(dU) = \sum_{j=1}^{N(n)} \mu^{[*]}(A \cap D_j^{(n)[*]}) = \sum_{j=1}^{N(n)} \mu(A \cap D_j^{(n)}),$$

により次が成り立つ。

$$\int 1_{A^{[*]} \cap X^{[1]}}(U)\mu^{[*]}(dU) = \mu^{[1]}(A^{[1]}).$$

分割を考えているので全ての関数は 1 を超えない。よって有界収束定理により

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N(n)} \mu(A \cap D_j^{(n)}) = \mu^{\langle 1 \rangle}(A^{\langle 1 \rangle}),$$

を得るので証明が終了する。 □

例 41　$X = [0, 1)$ としその上にルベーグ測度 λ を考える。X 上のボレル集合体 $\mathcal{B}$ 上の集合関数を $\mu(A) = \lambda(A)^2 + \lambda(A)$ と定める。これは多項式を歪関数とする歪測度なので，構成的に 2 - 加法的である。

　これに対して次のような分割を考える。

$$\{\Delta_n\} = \left\{ \left\{ \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right) \right\}_{j=1}^{2^n} \right\}.$$

これは命題 8 の条件 (3-1) - (3-3) を満たす。

A を $(X,\mathcal{B})$ 上の可測集合とするとき.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{2^n}\mu\left(\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right)\cap A\right)\\
=&\sum_{j=1}^{2^n}\left(\lambda\left(\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right)\cap A\right)+\lambda\left(\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right)\cap A\right)^2\right)\\
=&\lambda(A)+\sum_{j=1}^{2^n}\lambda\left(\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right)\cap A\right)^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &\le \sum_{j=1}^{2^n}\lambda\left(\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right)\cap A\right)^2\\
&\le \sum_{j=1}^{2^n}\lambda\left(\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right)\right)^2\\
&= \sum_{j=1}^{2^n}\frac{1}{(2^n)^2}=\frac{1}{2^n}\to 0,\quad \text{as } n\to\infty.
\end{aligned}
$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2^n}\mu\left(\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right]\cap A\right)=\lambda(A)$$

より高次元の要素については次の性質が成り立つ。

定理 42 定理 *40.* と同じ設定および仮定をする。可測集合による有限分割 $\mathbb{D}$ は $\mathcal{D}$ に属す。$\mathbb{D}'\subset\mathbb{D}$ は $\mathbb{D}'$ が $\mathbb{D}$ に属する集合で構成されることを意味している。

$\mathbb{D}=\{D_j\}_{j=1}^N\in\mathcal{D}$ と $A\in\mathcal{B}$ に対して

$$A\cap\mathbb{D}=\{A\cap D_j\}_{j=1}^N.$$

と定める。このとき，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\mu^{[k]}(A^{[*]})=\mu^{[*]}(A^{[*]}\cap X^{[k]})=\lim_{n\to\infty}\sum_{\mathbb{D}\subset\mathbb{D}_n,|\mathbb{D}|=k}\tau(A\cap\mathbb{D}).$$

証明 定理 40. と同様の方針で示す。この場合，$1_{A^{[*]}\cap X^{\langle k\rangle}}$ をどう近似するかがポイントとなる。

$$f_n(U)=\sum_{\mathbb{D}\subset\mathbb{D}_n,|\mathbb{D}|=k}1_{\Gamma(A\cap\mathbb{D})}(U).$$

と定め，各点収束することを示す。

$\mathbb{D}\in\mathcal{D}$ が $|\mathbb{D}|=k$ を満たすとすると，$\mathbb{D}$ の構成要素が全て A との共通部分を持てば $|A\cap\mathbb{D}|=k$ となる。このとき $|U|<k$ を満たす場合には，$U\cap(A\cap D_j)\neq\emptyset,\forall j\le k,$ を満たすことができないので，$U\notin\Gamma(A\cap\mathbb{D})$。したがって $|U|<k$ の場合は 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $f_n(U)=0$ となる。 .

次に，$|U| > k$ ($U = \{u_1, \dots, u_{k'}\}$, $k' > k$) の場合を考える。各 (i,j) ($1 \le i < j \le k'$) 毎に, 十分大きく $N_{i,j} \in \mathbb{N}$ をとると，次を満たすようにすることができる。

$$n \ge N_{i,j},\ D \in \mathbb{D}_n \Rightarrow \{u_i, u_j\} \not\subset D.$$

このとき，$n \ge \max_{1 \le i < j \le k'} N_{i,j}$ であれば, (全ての要素は異なる $D_j^{(n)}$ に属すことになるので)

$$U \in \mathbb{D} \subset \mathbb{D}_n \Rightarrow |\mathbb{D}| \ge k' > k.$$

従って この時には

$$\mathbb{D} \subset \mathbb{D}_n,\ |\mathbb{D}| > k \Rightarrow U \notin \Gamma(A \cap \mathbb{D}).$$

を満たすことになる。

$|U| = k$ ($U = \{u_1, \dots, u_k\}$) で，$U \cap A^c \ne \emptyset$であるときには，．十分 $N \in \mathbb{N}$ を大きくとって，それぞれの要素が異なる $D_j^{(n)}$ に属すようにすれば,

$$n \ge N, D \in \mathbb{D}_n \Rightarrow |\mathbb{D}| \ge k.$$

よって $|\mathbb{D}| = k$ ($\mathbb{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ and $\mathbb{D} \subset \mathbb{D}_n$ $(n \ge N)$, のときには，U の各要素と $\mathbb{D}$ の各要素 (有限部分集合) は 1 対 1 の対応があることになる。 仮定より U には A の要素ではないものが必ず一つはあるので，$A \cap \mathbb{D}$ には属すことはできない。したがって $U \notin \Gamma(A \cap \mathbb{D})$ となり $n \ge N$ では $f_n(U) = 0$ を満たすこととなる。

$\{\Gamma(\mathbb{D}) : \mathbb{D} \subset \mathbb{D}_n, |\mathbb{D}| = k\}$ は $X^{[k]}$ の分割であるので，任意の $U \in A^{[*]}$ ($|U| = k$) と各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$U \in \Gamma(A \cap \mathbb{D}).$$

となる $\mathbb{D}$ が一つだけ存在する。s

$$f_n(U) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

以上をまとめると次を満たすことがわかる。

$$1_{A^{[*]} \cap X^{\langle k \rangle}}(U) = \lim_{n \to \infty} f_n(U).$$

命題 3 より次が成り立つ。

$$\int_{X^{[*]}} f_n(U) \mu^{[*]}(dU) = \sum_{\mathbb{D} \subset \mathbb{D}_n,\ |\mathbb{D}| = k} \mu\left(\Gamma(\mathbb{D})\right). = \sum_{\mathbb{D} \subset \mathbb{D}_n,\ |\mathbb{D}| = k} \tau(\mathbb{D}).$$

従って

$$\int_{X^{[*]}} 1_{A^{[*]} \cap X^{\langle k \rangle}} d\mu^{[*]} = \mu^{\langle k \rangle}(A^{\langle k \rangle}).$$

よって証明が完成した。 □

9. 付録

例 43 $X = \{a,b,c\}$, $\mathcal{B} = 2^X$ とし，集合関数 μ を X 上に 測度 λ ($\lambda(\{a\}) = \alpha$, $\lambda(\{b\}) = \beta$, $\lambda(\{c\}) = \gamma$.) があたえられているとき

$$\mu(A) = \lambda(A)^2$$

と定める。$X^2 = \{(x,y) : x, y \in X\}$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\mu(\{(a,a)\} = \alpha^2, \quad \mu(\{(b,b)\} = \alpha^2, \\
&\mu(\{(a,b)\} = \mu(\{(b,a)\} = \alpha\beta, \\
&\mu(\{(a,b),(b,a)\} = 2\alpha\beta, \\
&\tau_{\{a,b\}} = 2\alpha\beta, \tau_{\{a,c\}} = 2\alpha\gamma, \tau_{\{b,c\}} = 2\beta\gamma \\
&\tau_{\{a,b,c\}} = 0 \\
&\tau(\{a\},\{b,c\}) = 2\alpha(\beta+\gamma) \\
&= 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma = \tau(\{a\},\{b\}) + \tau(\{a\},\{c\})
\end{aligned}$$

等が成り立つ。

補題 44 $(X,\mathcal{B})$ 上の集合関数 μ と， $\mathbb{D} \in \mathcal{D}$ に対して

$$\tau(\mathbb{D}) = \sum_{B \in \Gamma(\mathbb{D})} \tau_B.$$

$$\Gamma(\mathbb{D}) = \Gamma(\{D_1, \cdots, D_n\}) = \{\{x_1, \ldots, x_n\}, x_j \in D_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

が成り立つ。

(証明) $n = |\mathbb{D}| = 1$ のとき，補題 2 より直ちにわかる。
$n-1$ までの成立を仮定するとき 命題 2 より

$$\begin{aligned}
&\tau(\{D_1, \cdots, D_{n-2}, D_{n-1} \cup D_n\}) \\
= \ &\tau(\{D_1, \cdots, D_{n-2}, D_{n-1}\}) + \tau(\{D_1, \cdots, D_{n-2}, D_n\}) \\
&+\tau(\{D_1, \cdots, D_n\})
\end{aligned}$$

帰納法の仮定より 命題 20 を用いると

$$\begin{aligned}
&\tau(\{D_1, \cdots, D_n\}) \\
= &\sum_{B \in \Gamma(\{D_1,\cdots,D_{n-2},D_{n-1}\cup D_n\})} \tau_B - \sum_{B \in \Gamma(\{D_1,\cdots,D_{n-2},D_{n-1}\})} \tau_B - \sum_{B \in \Gamma(\{D_1,\cdots,D_{n-2},D_n\})} \tau_B \\
= &\sum_{B \in \Gamma(\{D_1,\cdots,D_{n-2},D_n\})} \tau_B
\end{aligned}$$

となり求める結果を得る。 □

10. まとめ

本報告では，ここ数年の k - 加法性およびその一般化に対して検討したものをまとめてみた。 もともとの漠然とした目標は，非離散化した空間で非加法的な集合関数が設定されているとき，それに基づく関数解析的な議論がやりやすい空間を設定することだったように思う。k がいくらでも大きくてよいのであれば，有限集合上の集合関数は全て k - 加法的であるので，凸性や優/劣加法性といったものを仮定せずにすむ広い空間が設定できるという期待もあった。しかし，例えば歪測度の中では， たとえ $k \to \infty$ とした場合でも，対応する歪関数に関してかなり強い仮定を置かないとそれが含まれそうにない。広く網羅する空間とするためには，あと何段階かブレイクスルーが必要なようだ。また，この様な議論はいろんな角度から独立に解析されていてそれらの相互関係もまとめるに至っていない。 現在の状況としては，魅力がやっと見えてきたが，やるべきことが多すぎて少し戸惑っているところともいえる。これは，ありがたいことで今回この報告をするために調べたりまとめたりしたことの最大の成果だと思っている。

最後に，この報告をまとめるにあたり，議論コメントなど様々なご協力をいただいた岡崎先生，本田先生， 関連研究に対して貴重な情報をいただいた成川先生 (玉川大工学部) ，ならびに様々なヒントやアドバイスをいただいた全ての方に深い感謝の意を表し，この稿を閉じることとする。

参考文献

[1] 中山幹夫, 船木由喜彦, 武藤滋夫, 協力ゲーム理論, 勁草書房, 2008.

[2] 岸. 信, 協力ゲーム理論入門, オペレーションズリサーチ 60(6) (2015) 343–350.

[3] 菅野道夫, 室伏俊明, ファジィ測度, 日刊工業新聞社, 1993.

[4] G. Shafer, A mathematical theory of evidence, Princeton Univ., 1976.

[5] A. Honda, Y. Okazaki, Theory of inclusion-exclusion integral, Information Sciences 376 (2017) 136–147.

[6] A. Honda, Y. Okazaki, Program design and implementation of inclusion-exclusion integral neural network, Proceedings The 20th International Conference on Modeling Decisions for Artificial Intelligence (2023) 98–109.

[7] J. Kawabe, Nonadditive measures and nonlinear integrals -forcusing on a theoretical aspect-, SUGAKU EXPOSITIONS 34(1) (2021) 61–92.

[8] T. Murofushi, S. Sujino, A sufficient condition for a strong form of the egorov theorem in non-additive measure theory, Linear and Nonlinear Analysis 3(3) (2017) 385–391.

[9] D. Denneberg, Representation of the choquet integral with the σ-additive möbius transform, Fuzzy Sets and Systems 92 (1997) 139–156.

[10] Y. Narukawa, T. Murofushi, Representation of the choquet integral with the σ-additive möbius transform, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 14(5) (2006) 579–589.

[11] R. Mesiar, k-order additivity and maxitivity, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. modena 51 (2003) 179–189.

[12] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, Suitable l_p spaces for a k-additive set function, Fuzzy Set and Systems Volume 457, 15 April 2023, Pages 20-31 (15) (2021) 20–31.

[13] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, Constructive k-additive measure and decreasing convergence theorems, in: MDAI 2020. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 12256, Springer, 2020, pp. 104–116.

[14] A. Honda, R. Fukuda, Y. Okazaki, Non-discrete k-order additivity of a set function and distorted measure, Fuzzy sets and systems(Available online) 480 (28) (2022) 36–47.

[15] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, On two generalizations for k-additivity, in: MDAI 2021. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 12898, Springer, 2021, pp. 43–53.

[16] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, Constructive set function and extraction of a k-dimensional element, in: MDAI 2023. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 13890, Springer, 2023, pp. 58–69.

[17] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, 1976.

[18] 藤本勝成, 意思決定とメビウス変換, 日本ファジィ学会誌10(2) (1998) 206–214.

[19] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier 5 (1953) 131–295.

[20] Q. Yang, The pan-integral on the fuzzy measure space, Fuzzy Mathematics (in Chinese) 3 (1985) 107–114.

[21] J. Kawabe, The topology on the space of measurable functions that is compatible with convergence in nonadditive measure, Fuzzy sets and systems(Available online) 430 (28) (2022) 1–18.

[22] Y. Ouyang, R. Mesiar, On linearity of pan-integral and pan-integrable functions space, InternatFional Journal of Approximate Reasoning archive 90 Issue C (2017) 307–318.

[23] Q. Zhang, R. Mesiar, J. Li, P. Struk, Generalized lebesgue integral, International Journal of Approximate Reasoning 52(3) (2011) 427–443.

[24] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, Comparison of decomposition type nonlinear integrals based on the convergence theorem (in japanese), Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Intelligent Informatics 32(4) (2020) 782–791.

[25] J. Neveu, Mathematical foundations of the calculus of probability, Holden-Day series in probability and statistics, San Francisco, Holden-Day, 1965.