k-加法的測度の非離散化

Non-Discretization of k-Additive Measure

◯ [1] 福田亮治, [2] 本田あおい, [3] 岡崎 悦明

◯ [1]Ryoji Fukuda, [2]Aoi Honda, [3]Yoshiaki Okazaki

[1] 大分大学 理工学部 [2] 九州工業大学情報工学部 [3] ファジィシステム研究所

Abstract: The concept of the k-additive measure is originally defined for a non-additive measure on a finite set. We propose two types of non-discretization for the definition of k-additive measure: "Constructive k-additive measure" and "Formulaic k-additive measure". We found some their properties and relations.

1 はじめに

k-加法的測度は有限集合上の集合関数に対して定義される概念で，k 個 (k は自然数) までの，相互関係を考慮した集合関数とみることができる。この定義には，メビウス変換を用いるために，非離散的無限集合上の単調測度等に適用するには何らかの工夫が必要となる。この報告では，k-加法的測度の 2 種類の非離散化を与える。一つは，集合関数を表現するために，複数の直積空間を定める方法で，これを「構成的 k-加法的測度」と呼ぶことにする。 もう一つは, 有限集合上の k-加法的測度が満たす，特徴的な性質をもとに定義する方法で，この定義を「定式的 k-加法的測度」呼ぶことにする。これら 2 種類の非離散化に対して，それぞれの性質と，その相互関係について得られた結果を説明する。

2 有限集合上の k-加法的測度

X を有限集合とし，2^X を X のベキ集合, 集合関数 $\mu : 2^X \to [0,\infty)$ が，$\mu\{\emptyset\} = 0$ を満たすものとする。この時, 集合ごとに定まる定数 $\{\mu_B\}_{B\subset X, B\neq\emptyset}$ を次を満たすようにとることができる。

$$\mu(A) = \sum_{B\subset A} \mu_B, \quad \forall A \subset X.$$

この $\{\mu_B\}_{B\subset X,B\neq\emptyset}$ を μ のメビウス変換と呼ぶ。メビウス変換の性質として，ショケ積分 $\int^{\mathrm{ch}} f d\mu$ に関する次の性質が良く知られている。性質の紹介の前に, 単調測度とショケ積分の定義を確認する。$\mu : 2^X \to [0,\infty)$ (非離散化したときは σ-集合体 $\mathcal{B}$ じょうの非負関数) が単調測度であるとは，$(\mu(\emptyset) = 0, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B))$ を満たすこととし，X 上の非負関数 f (非離散化したときは $\mathcal{B}$ 可測非負関数) の 単調測度 μ に関するショケ積分は次で定義されるものとする。

$$\int^{\mathrm{ch}} f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x : f(x) \geq r\}) dr$$

事実 1 単調測度 μ に対して $\{\mu_B\}_{B\subset X,B\neq\emptyset}$ をメビウス変換とする。 このとき関数 $f : X \to [0,\infty)$ に対して，ショケ積分 $\int^{\mathrm{ch}} f d\mu$ は次を満たす。

$$\int^{\mathrm{ch}} f d\mu = \sum_{B\subset X.B\neq\emptyset} \min_{x\in B} f(x)\mu_B.$$

このようなメビウス変換を用いて k-加法的測度を次で定める。

定義 2 X 上の単調測度 μ が k-加法的測度 ($k \in \mathrm{N}, k \leq n$ であるとは，メビウス変換 $\{\mu_B\}_{B\subset X,B\neq\emptyset}$ が $|B| > k \Rightarrow \mu_B = 0$ を満たすこととする。

次の例で示す性質が，定式的 k-加法的測度の基本となるものである。

例 3 $X = \{a, b, c\}$, μ を X 上の 2-加法的測度とする。$A, B \subset 2^X$, $(A \cap B = \emptyset)$ に対して，$\nu(A, B) = \mu(A \cup B) - \mu(A) - \mu(B)$ と定める。このとき, 互いに素な集合 $A, B, C \subset 2^X$ に対して $\nu(A, B \cup C) = \nu(A, B) + \nu(A, C)$ を満たす。実際 $A = \{a\}, C = \{b\}, B = \{c\}$ であるとき (3 点集合なので実質的にこのタイプしかない), メビウス変換を $\{\mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_{ab}, \mu_{bc}, \mu_{ca}\}$ (2-加法性より $\mu_{abc} = 0$ を略す) と置けば，次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mu(A \cup B \cup C) &= \mu_a + \mu_b + \mu_c + \mu_{ab} + \mu_{bc} + \mu_{ca} \\
\mu(B \cup C) &= \mu_b + \mu_c + \mu_{bc} \\
\mu(A) &= \mu_a \\
\nu(A, B \cup C) &= \mu(A \cup B \cup C) - \mu(A) - \mu(B \cap C) \\
&= \mu_{ab} + \mu_{ac} \\
&= \nu(A, B) + \nu(A, C)
\end{aligned}$$

3 定式的 k-加法的測度

この節では可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の単調測度に対して，有限集合に対する k-加法的測度が満たしていた式を，非離散化して定式的な k-加法的測度を定義する。そのために，互いに共通部分を持たない j 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_j$ を

変数とする集合関数 $\nu_j(A_1,\ldots,A_j)$ を次のように定める。この関数を j 次の調整関数と呼ぶ。

定義 4　(i) $\nu_1(A)=\mu(A)$.

(ii) $\nu_j(A_1,\ldots A_j)=\mu(\bigcup_{\ell=1}^{j} A_j)-$

$$\sum_{\ell=1}^{j-1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_\ell<j}\nu_\ell(A_{i_1},\ldots,A_{i_\ell}).$$

調整関数は，j 個の変数に対して対称的であり，一つの集合が空集合であれば，値が 0 になる。この集合関数を用いて k-加法性を次で定める。

定義 5 μ を単調測度, $j\in\mathrm{N}$ ごとに ν_j を j 次の調整関数とする。このとき，μ が定式的 k-加法的測度であるとは，$\forall j>k$ に対して $\nu_j=0$ をみたすこととする。

定式的 k-加法的測度は次を満たす。

定理 6 $k\in\mathrm{N}$, μ を単調測度, ν_j, $(j\in\mathrm{N})$ を調整関数とするとき次は同値。

(i) 任意の $j>k$ に対して $\nu_j=0$.

(ii) 任意の互いに素な集合族 $A_1,A_2,\ldots,A_k,A_{k+1}$ に対して，

$$\nu_k(A_1,\ldots,A_{k-1},A_k\cup A_{k+1})$$
$$=\nu_k(A_1,\ldots,A_{k-1},A_k)+\nu_k(A_1,\ldots,A_{k-1},A_{k+1}).$$

4　構成的 k-加法的測度

可測空間 $(X,\mathcal{B})$ に対して $X^{(j)}=\{\{x_1,x_2,..,x_j\}\subset X: x_i\neq x_\ell,\ i\neq\ell\}$ と置く。 直積と並べ替えの同一視 (商空間) に対応する σ-集合体を考え，可測空間とする。また，$A\in\mathcal{B}$ に対して，$A^{(j)}=\{\{x_1,x_2,..,x_j\}\subset A: x_i\neq x_\ell,\ i\neq\ell\}$ と定める。

定義 7 可測空間 $(X,\mathcal{B})$ 上の単調測度 μ が，構成的な k-加法的測度であるとは，$X^{(j)}$ 上の実測度 μ_j が存在して $\mu(A)=\sum_{j=1}^{k}\mu_j(A^{(j)})$ を満たすこととする。

構成的な k-加法的測度は全て定式的な k-加法的測度である。

定理 8 μ を構成的な k-加法的測度とするとき，$\nu_k(A_1,\ldots,A_{k-1},\cdot)$ は，$k-1$ 個の変数 *(*集合*)* を固定するごとに，k 番目変数 *(*集合*)* に対して加法的な測度である。

5　収束定理に関わる考察

現在考案されている単調測度に関する積分は，分布関数型のものと，分割型のものとに分けて考える事が多い。分布関数型の積分は，かなり一般的に単調収束定理が成り立つ。これらについては河邊氏がその条件を詳しく調べている (Kawabe [1])。分割型には，凸型 (SD 積分，凸積分, など) と凹型 (Pan 積分, 凸積分，など) があり，前者に対しては単調減少収束定理が，後者については単調増加収束定理が，一定の条件のもと成りたつ。しかし，逆向きの収束定理は，かなり特殊な仮定の下でのみ示されている ([2])。

凹型の分割型積分に対して，単調測度が劣加法的であれば積分に線形性があり，それを用いると単調減少収束定理を示すことができる。単調測度に劣加法性を仮定するのは適用できる状況をかなり狭めることになる。これに対して，最近構成的な k-加法測度の場合に単調減少収束定理が一定の条件の下成り立つことが分かった ([3])。k-加法性も強い条件ではあるが，劣加法性の立場から考えると，有限集合上の単調測度が全て k-加法的であるので，かなり一般的な状況を表現しうる概念であることが分かる。

参考文献

[1] 河邊淳 A unified approach to convergence theorems of distribution-based nonlinear integrals, 日本数学会・２０１８年度秋季総合分科会（於：岡山大学）・実函数論分科会

[2] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 分割型非線形積分の収束定理 (解説論文), 知能と情報 Vol31, No4 pp.108-115 2019

[3] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, Pan 積分の拡張と単調収束定理, 実解析シンポジウム 2019 予稿集

連絡先

福田亮治

E-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp