原著論文

収束定理から見た各種分割型非線形積分の比較†

福田　亮治*1・本田　あおい*2・岡崎　悦明*3

単調測度に対する非線形積分の中で, 単関数による近似を用いたものを分割型積分と総称している. これらには，近似の上下の方向性, 対応する集合族の共通部分の有無によりいくつかの種類がある. 本稿では，これに係数の符号，和の有限性という視点を増やし，それらの積分を一様収束定理，単調増加/減少収束定理という立場から比較する. 我々の対象とする積分では，これらの収束定理は一部のみ成り立つことが多い. どの様な性質がいかなる条件の下成り立つかを詳細に調べることで，非加法的な測度に関する分割型積分の特徴を明らかにしていきたい.

キーワード：単調測度, 非線形積分, 収束定理

1. 序論

1.1 はじめに

本稿では, 非離散的な空間上の単調測度に関する分割型積分に対する収束定理について議論する. 単調測度とは単調性のみを仮定した集合関数で, 一般に加法性を満たさず, 非加法的測度とも呼ばれる. 単に「測度」という場合は，単調測度より狭い概念で，加法性 (σ-加法性) を持つという条件が加わるが，これが近代的な積分論の基礎となっていることはここで特筆する必要はないであろう. 単調測度に対しても何らかの意味で積分を考える試みが数多くみられるが，要請される定量化の多様性や加法性を仮定しないための不具合などから, 多種多様の異なった汎関数が提案されている. それらの積分は線形性を持たないことが多く, しばしば「非線形積分」と呼ばれる.

非加法的測度や対応する積分は経済の分野やゲーム理論などで利用されるが ([1],[2]), その多くは有限集合上の集合関数として解析されている. 有限集合上の加法的測度は一点集合の測度 (集合関数の値) で定まるため, 要素数の自由度にとどまるが, 非加法的な場合加法性の制約がない分, ベキ集合の個数に近い自由度がある. これは, 生の集合での解析の困難さにつながり, 何らかの近似理論が有効であると思われる. そのために, 非離散的な（連続的な無限集合上の) 単調測度及びそれに関する積分の理論が必要となり, その出発点として「収束定理」は細部まで解明しなければならない問題の一つであろう.

現在まで, 単調測度に関する積分の収束定理に対して, 分布関数型と呼ばれる種類の積分を中心に, 様々な結果が得られている. 特に分布関数型の収束定理に対しては, 河邊氏により詳細な解析及び解説が与えられている ([4]). 我々が考察の対象とするのは, 単関数による近似を用いた「分割型の積分」であるが，この種の積分に対しては解明されていることは少ない. 分割型の積分はその構成方法から, 直感的に理解しやすい形をしているため, 様々な評価 (定量化) に有効であると考えられ, その論理的な裏付けは大きな意義があると考えている. 非線形積分の中では Choquet 積分が最も代表的であるが，この積分は分布関数型の積分の一つとして位置付けられることが多い. しかし，Choquet 積分は， 分割型として位置付けられる包除積分 ([3]) の一例でもある. 包除積分は構造が複雑なため，本稿では解析の対象としないが，将来的には統一的に扱いたい概念の一つである.

1.2 分割型積分

分割型の積分は単関数に対する自然な定量化を用いて定められる. 単関数は複数の可測集合の定義関数の線形和 ($\varphi = \sum_k a_k 1_{A_k}$) として表されるものとする. μ を単調測度とするとき, 単関数 φ の μ に関する基本和 $\mu(\varphi)$ を

$$\mu(\varphi) = \sum_k a_k \mu(A_k)$$

と定める. 本稿で扱う分割型の積分は, 被積分関数である可測関数に対して「下回る単関数の基本和の上限」 または,「上回る単関数の基本和の下限」で定められる. 表現の簡略化のため, 前者を「下からの近似」, 後者を「上からの近似」と呼ぶことにする. このとき, 近似が上からか下からか, 単関数に用いる集合族が互いに素であるかどうか, 係数が非負かどうか, 有限和か無限和 (可算和) かということで種類を分けて考える. 既存の研究では有限和で非負のものが扱われており, 互いに素な場合, 下からのものを Pan 積分（[5]), 上からのものを SD 積分 ([7]), 互いに素でなくてよい場合, 下からのものを凹積分 ([6]), 上からのものを凸積分 ([7]) と呼ぶことにする. 本稿では, それぞれの積分に対して, 無限和 (可算和) にしたもの, 負の値を許す積分も合わせて, 一様収束定理, 単調増加・減少収束定理について議論する.

これらの積分の発展形には, 本稿での解析の対象としていない, 単関数を構成する和積の演算子の一般化や, 離散凸解析にお

---

† Comparison of Decomposition type Nonlinear Integrals Based on the Convergence Theorem
Ryoji Fukuda, Aoi Honda, and Yoshiaki Okazaki
*1 大分大学 理工学部
Faculty of Science and Technology, Oita University
*2 九州工業大学
Kyushu Institute of Technology
*3 ファジィシステム研究所
Fuzzy Logic Systems Institute

ける拡張ととらえられるものなど, 様々な状況を考えることができる [10]. これらに関する更なる議論は, 将来の問題として残すことにする.

1.3 収束定理

それぞれが積分可能な関数列がある関数に一様収束すれば, 対応する積分の値も極限の積分に収束する場合に, 一様収束定理を満たすという. 実数上の通常の積分 (ルベーグ積分) の場合, 積分領域の測度 (長さ) が有限であれば, 一様収束定理が成り立つ. 我々の考察の対象とする積分に対しては, 全空間 (全体集合) の単調測度の値が有限でも, 一般に一様収束定理は成り立たない事が分かる (本稿で例証する). これらには我々の設定する各種の条件が微妙に絡むことになる. 3 節で詳しく述べる.

単調増加/減少収束定理は, 近似の方向に強く影響を受ける. 下からの近似の場合は単調増加収束定理が, 上からの近似の場合は単調減少収束定理が, 基本的には成り立つことを示す. 非負値有限和の単関数を用いた積分に関しては, [11] で和積を演算子として一般化した設定で証明が与えられていたりするので, 一部はよく知られている性質である可能性もある. 本稿では，これらに対しても，原則として証明を与えていき，状況毎の証明の方向性の違いや条件の違いなどを比較することを主眼として議論をする.

2. 単関数族と積分の定義

この節では, 議論に必要な概念と表記方法および, 共通に必要となる基本的事項について述べ, 様々な種類の分割型積分の定義を与える.

2.1 基本設定・単関数族

本稿を通して $(X, \mathcal{B})$ を可測空間 (X は一般に非離散的な無限集合, $\mathcal{B}$ は σ-集合体) とする.

定義 1 $(X, \mathcal{B})$ 上の正値集合関数 $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ が単調測度であるとは, 次を満たすこととする.

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) $A \subset B$ ならば $\mu(A) \le \mu(B)$.

本稿では単関数を, 可測集合の定義関数の有限個または可算無限個の線形和で表されるものとする. 分割型の積分は, 可測関数を上側または下側から単関数により近似する形で定義されるが, 単関数の種類や近似の方向により状況がさまざまである. その場合に, 次の視点で積分の種類を分けて考えることにする.

(a) 上からの近似か，下からの近似か.

(b) 対応する集合族が互いに素かどうか.

(c) 有限和か無限和 (可算和) か.

(d) 係数が非負か負を許すか.

μ を可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の単調測度とする. 一般的に単関数族を

$$\mathcal{S} \subset \{(a_k, A_k)_{k=1}^{N} : a_k \in \mathbb{R}, \quad A_k \in \mathcal{B}, k = 1, 2, \ldots, N \le \infty\}$$

と考える. φ を関数として扱うときは $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k 1_{A_k}(x)$ を考える. この φ に対して基本和 $\mu(\varphi)$ を

$$\mu(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} a_k \mu(A_k)$$

と定める. 単調測度には一般に加法性は無いので, 関数として同じでも基本和の値は同じとは限らない. そこで，本稿における単関数は実数と可測集合の対の列と考える. 単関数における和は, 有限和もしくは可算和を考えるが, 可算和の場合は $\sum |a_k| \mu(A_k) < \infty$ を満たすものだけを考える. このような単関数に対して, 上に述べた視点 (a)~(d) ごとに以下の記号で表す. 尚, 集合族に関しては, 必要なら係数が 0 の項を加えて，分割もしくは被覆になる (和集合が全体になる) ことを仮定する.

記号	分割/被覆	有限/可算	正値/正負
$\mathcal{S}^{P+}$	分割	有限	正値
$\mathcal{S}^{P\pm}$	分割	有限	正負
$\mathcal{S}_{\mu}^{P+}$	分割	可算	正値
$\mathcal{S}_{\mu}^{P\pm}$	分割	可算	正負
$\mathcal{S}^{C+}$	被覆	有限	正値
$\mathcal{S}^{C\pm}$	被覆	有限	正負
$\mathcal{S}_{\mu}^{C+}$	被覆	可算	正値
$\mathcal{S}_{\mu}^{C\pm}$	被覆	可算	正負

表 1 単関数族

下からの近似を用いた積分は, Q. Yang [5] (単関数の集合族が分割), および E.Lehrer [6] (単関数の集合族が被覆) により, 有限非負値単関数による近似として与えられている. それに対して, 上からの近似の場合の積分は, やはり有限正値単関数による近似として R. Mesiar ら [7] (分割/被覆双方) により定義されている. 実データの解析において，全体集合が人の集まりで, いくつかの作業に従事し同時に複数の作業に関わることが難しい場合の評価には, 分割を用いた単関数を用いるのが適当であるのに対し, 部品の集まりを基本の空間として，複数ある部品や分けられる原料の場合, 必ずしも分割である必要がないと思われる. このように, 原始的な積算 (基本和) を用いた積分は, 状況によってその表現を変える必要が生じると思われる.

また有限和の単関数の場合, 近似の方向によっては上または下に有界な関数しか扱えなくなる. そこで，単関数を可算和とすることで非有界な関数を扱えるようにした. さらに, 双対性を考察するときには, 符号の入れ替えを行える必要があり, 正負両方の符号を許す枠組みも考えていくことにする.

分割を用いた単関数による下からの近似を用いた積分を Pan 積分 ($\int^{\mathrm{pan}}$), 上からの近似を用いた積分を SD(super decomposition) 積分 ($\int^{\mathrm{sd}}$), 被覆の場合, 下からのものを凹積分（$\int^{\mathrm{cav}}$), 上からのものを凸積分 ($\int^{\mathrm{vex}}$) と呼ぶことにする. 単関数族の違いは以下のように記号で区別する.

記号	方向 (上下)	分割/被覆
$\int^{\mathrm{pan}}_{+/\pm/\sigma+/\sigma\pm}$	下から	分割
$\int^{\mathrm{sd}}_{+/\pm/\sigma+/\sigma\pm}$	上から	分割
$\int^{\mathrm{cav}}_{+/\pm/\sigma+/\sigma\pm}$	下から	被覆
$\int^{\mathrm{vex}}_{+/\pm/\sigma+/\sigma\pm}$	上から	被覆

表 2 各種積分の表記

記号	非負/正負	有限/可算
$\int_{+}$	非負	有限
$\int_{\pm}$	正負	有限
$\int_{\sigma+}$	非負	可算
$\int_{\sigma\pm}$	正負	可算

表 3　非負/正負, 有限/可算

単調測度 μ に関する下からの近似としての積分 ($\int_{+}^{\mathrm{pan}}$) と, 上からの近似としての積分
($\int_{+}^{\mathrm{sd}}$) を非負値可測関数 f に対して次のように定義する. 他の積分も同様に定義する.

$$\int_{+}^{\mathrm{pan}} f d\mu = \sup\left\{\mu(\varphi) : \varphi \in \mathcal{S}^{P+},\, \varphi \le f\right\},$$

$$\int_{+}^{\mathrm{sd}} f d\mu = \inf\left\{\mu(\varphi) : \varphi \in \mathcal{S}^{P+},\, \varphi \ge f\right\}.$$

積分の種類が多いため, 全てを忠実に表記すると, 紙面を浪費するため, 次の記法を用いることにする. 一般的な積分を $\int$ で表し, 対応する単関数族を $\mathcal{S}$ とする. 例えば下からの有限近似全般を対象に議論する場合は, $\int = \int_{+}^{\mathrm{pan}}, \int_{\pm}^{\mathrm{pan}}, \int_{+}^{\mathrm{cav}}, \int_{\pm}^{\mathrm{cav}}$ または, $\int = \int_{+/\pm}^{\mathrm{pan/cav}}$ と表すこととする. 具体的な積分が $\int_{+}^{\mathrm{cav}}$ である場合, $\mathcal{S}$ と表記する単関数族は, 実際は $\mathcal{S}^{C+}$ である. ここに, 積分右上の pan/cav の表記は, Pan 積分または凹積分という意味であり, 右下の表記 +/± も同様の対応を考える.

必要に応じて参照してもらうために, これらの記号の意味について表 1 ~ 3 についてまとめた. また記号中の文字 ± は, どちらか一方のものが２つあるということではなく，正負の両方を考えるという意味で用いている.

2.2　積分の基本性質

この小節では, 今後の議論の基礎となる分割型積分の性質について述べる. 共通する設定として, $(X, \mathcal{B})$ を可測空間, μ を単調測度とし, 以下断りなく用いることにする. また, 対象となる積分について,「下からの積分」とする場合は

$$\int = \int_{+/\pm/\sigma+/\sigma\pm}^{\mathrm{pan/cav}} \quad ,$$

「上からの積分」とする場合は

$$\int = \int_{+/\pm/\sigma+/\sigma\pm}^{\mathrm{sd/vex}}$$

を意味するものとする (表 2 およびその説明を参照).

ここで扱う積分は一般的に線形性を満たさないが, 単調性および正のスカラー倍に関する一次の斉次性を満たす.

補題 2 全ての分割型積分 $\int = \int_{+/\pm/\sigma+/\sigma\pm}^{\mathrm{pan/sd/cav/vex}}$ に対して次が成り立つ.

(a) 可測関数 f, g が $f \le g$ であれば,

$$\int f d\mu \le \int g d\mu,$$

(b) 可測関数 f と正の定数 $c > 0$ に対して,

$$\int c f d\mu = c \int f d\mu.$$

証明　(a) 下からの近似の場合, 単関数 φ に対して $\varphi \le f$ であれば $\varphi \le g$ である. 従って

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi \le f} \mu(\varphi) \le \sup_{\varphi \le g} \mu(\varphi) = \int g d\mu.$$

上からの近似の場合も同様.

(b) 下からの近似の場合, 任意の可測関数 f, 正の定数 $c > 0$, および単関数 $\varphi = \sum_k a_k 1_{A_k}$ に対して, $\varphi \le f$ と $c\varphi \le cf$ とが同等であること,

$$\mu(c\varphi) = \sum_k c a_k \mu(A_k) = c \sum_k a_k \mu(A_k) = c\mu(\varphi)$$

であることから直ちに分かる. 上からの近似の場合も同様.

ここまで形式的に, 様々な積分を定めてきたが, $\int_{\pm/\sigma\pm}^{\mathrm{cav}}, \int_{\pm/\sigma\pm}^{\mathrm{vex}}$ に関しては単関数に自由度があまりにも大きく, 有限確定値を保証することさえ一般に困難である. 従って, 本稿では他との比較で例外的に登場する以外は, 基本的に考察の対象としないことにする.

補題 3 **(a)** $\int = \int_{+/\sigma+}^{\mathrm{pan}}$ であるとき, 全ての可測関数 f 及び可測集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\int f d\mu \ge \int f 1_A d\mu + \int f 1_{A^c} d\mu.$$

(b) $\int = \int_{+/\sigma+}^{\mathrm{cav}}$ であるとき, 全ての可測関数 f, g に対して, 次が成り立つ.

$$\int f + g d\mu \ge \int f d\mu + \int g d\mu.$$

(c) $\int = \int_{+/\pm/\sigma+/\sigma\pm}^{\mathrm{sd}}$ であるとき, 全ての可測関数 f 及び可測集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\int f d\mu \le \int f 1_A d\mu + \int f 1_{A^c} d\mu.$$

(d) $\int = \int_{+/\sigma+}^{\mathrm{vex}}$ であるとき, 全ての可測関数 f, g に対して, 次が成り立つ.

$$\int f + g d\mu \le \int f d\mu + \int g d\mu.$$

証明　(a),(b)　$\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ を

$$\varphi \le f\, 1_A, \quad \psi \le f\, 1_{A^c}, \quad \text{(a)}$$

$$\varphi \le f, \quad \psi \le g \quad \text{(b)}$$

を満たす任意の単関数とする. Pan 積分 (単関数の集合族は互いに素) の場合は φ, ψ に対応する集合族は互いに素になる. 従って双方で，$\varphi + \psi \in \mathcal{S}$ かつ (a) の場合は $\varphi + \psi \le f$, (b) の場合は $\varphi + \psi \le f + g$ が成り立つ. これは

$$\mu(\varphi) + \mu(\psi) = \mu(\varphi + \psi) \le \begin{cases} \int f d\mu & \text{(a)} \\ \int f + g d\mu & \text{(b)} \end{cases}$$

を意味する. 従って次が成り立つ.

$$\int f d\mu \ge \int f 1_A d\mu + \int f 1_{A^c} d\mu, \quad \text{(a)}$$

$$\int f + g d\mu \ \ge \int f d\mu + \int g d\mu. \quad \text{(b)}$$

(c),(d) は，不等号の向きを変え，ほぼ同様に示すことができる. ただし (c) の場合には

$$f 1_A \le \varphi,\ f 1_{A^c} \le \psi$$

を満たす単関数 φ, ψ に対して, $\varphi 1_A$, $\psi 1_{A^c}$, $\varphi 1_A + \psi 1_{A^c} \in \mathcal{S}$

かつ

$$f1_A \leq \varphi 1_A, \quad f1_{A^c} \leq \psi 1_{A^c}, \quad f \leq \varphi 1_A + \psi 1_{A^c}$$

であるので

$$\begin{aligned}\int f d\mu &\leq \mu(\varphi 1_A + \psi 1_{A^c}) \\ &= \mu(\varphi 1_A) + \mu(\psi 1_{A^c}) \\ &\leq \mu(\varphi) + \mu(\psi)\end{aligned}$$

が成り立つが，これを合わせて考える必要がある．

3. 一様収束定理

この節では, 各種積分の一様収束定理について議論する．

「関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，極限関数 f に一様収束し, $\int f_n d\mu, \int f d\mu < \infty$, $(n \in \mathbb{N})$ であれば $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$ を満たす.」

という性質を一様収束定理と呼ぶ．通常の測度の場合, 全体の測度が有限であれば一様収束定理は成り立つが, 単調測度の場合, この節で例証するように必ずしも成り立つとは限らない. 積分の種類ごとに状況が異なり, 積分の特徴を調べる一つの視点となると考えられる．

積分の収束には測度の連続性が強く関係している．単調測度の連続性は次のように定義する．

定義 4 μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の単調測度とする．このとき, 上下からの連続性をそれぞれ以下のように定める．

(a) μ が $\emptyset$ において連続であるとは $A_n \searrow \emptyset$, $(n \to \infty)$ かつ $A_n \in \mathcal{B}$, $\mu(A_n) < \infty$, $(n \in \mathbb{N})$ であれば, $\mu(A_n) \searrow 0$, $(n \to \infty)$ を満たすこととする．

(b) μ が上から連続であるとは $A_n \searrow A$, $(n \to \infty)$ かつ $A_n \in \mathcal{B}$, $\mu(A_n) < \infty$, $(n \in \mathbb{N})$ であれば, $\mu(A_n) \searrow \mu(A)$, $(n \to \infty)$ を満たすこととする．

(c) μ が下から連続であるとは $A_n \nearrow A$, $(n \to \infty)$, $A_n, A \in \mathcal{B}$, $(n \in \mathbb{N})$ であれば, $\mu(A_n) \nearrow \mu(A)$, $(n \to \infty)$ を満たすこととする．

3.1 Pan 積分の一様収束定理

σ 加法的な測度の場合, 全体の測度が有限であれば, 一様収束定理が成り立つが, 我々の考察の対象としている積分は必ずしも, これが成り立つとは限らない. Pan 積分の場合にその反例を与える．

例 5（増田氏による） $X = [0,1] \times \mathbb{N}$ とし, 自然なボレル集合体 $\mathcal{B}(X)$ を考える．

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \mathit{if}\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists B \in \mathcal{B}([0,1]),\ |B| > \frac{1}{n},\ s.t. \\ & \qquad B \times \{1,2,\ldots,n\} \subset A, \\ 0, & \qquad\qquad \mathit{otherwise}. \end{cases}$$

により単調測度 μ を定める．ここに，$|B|$ は B のルベーグ測度を表すものとする．

この可測空間上に, 関数 f を次のように定める．

$$f(x,n) = \frac{1}{n}.$$

このとき, 次が成り立つ．

(a) μ は下からの連続性を持つ．

(b) μ は $\emptyset$ において連続ではない．

(c) 任意の $\delta \in (0,1)$ に対して, $\int_{+}^{\mathrm{pan}} f \wedge \delta d\mu = 1.$

(d) $\int_{+}^{\mathrm{pan}} 1_X d\mu = \infty.$

証明と解説 (a) $A_k \nearrow A$ $(k \to \infty)$, $A_k \in \mathcal{B}(X)$, $(k \in \mathbb{N})$ であるとする．$\mu(A) = 0$ であれば自明なので, $\mu(A) = 1$ であるとする．このとき

$$|B| \geq \frac{1}{n} + a, \quad B \times \{1,2,\ldots,n\} \subset A$$

を満たすよな $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $B \subset [0,1]$ が存在する．

$$\left(\bigcup_k A_k\right) \cap B \times \{1,2,\ldots,n\} = B \times \{1,2,\ldots,n\}$$

であるので, 任意の $(x, j) \in B \times \{1,2,\ldots,n\}$ に対して十分大きく $k_{x,j} \in \mathbb{N}$ をとれば, $k \geq k_{x,j} \Rightarrow (x, j) \in A_k$ を満たす．$k_x = \max_{j \leq n} k_{x,j} < \infty$ と置くと, $k \geq k_x \Rightarrow \{x\} \times \{1,2,\ldots,n\} \subset A_k$ が成り立つので,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : \{x\} \times \{1,2,\ldots,n\} \subset A_k\} \supset B$$

となる．$|B| \geq \frac{1}{n} + a$ より, $B' = \{x : \{x\} \times \{1,2,\ldots,n\} \subset A_k\}$ と置くと, ルベーグ測度の連続性を用いて, 十分大きな $K \in \mathbb{N}$ を取り，$k \geq K$ なる全ての k に対して

$$|B'| \geq \frac{1}{n} + \frac{a}{2}, \quad B' \times \{1,2,\ldots,n\} \subset A_k$$

を満たすようにできる．これは $\mu(A_k) = 1$ $(k \geq K)$ を意味するので求める結果を得る．

(b) $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \times \mathbb{N}$, $(n \in \mathbb{N})$ と置くと, $A_n \searrow \emptyset$ である．μ の定め方から, 任意の n に対して $\mu(A_n) = 1$ となるので, μ は $\emptyset$ において連続ではない．

(c) 単関数 $\varphi = \sum_k a_k 1_{D_k} \in \mathcal{S}^{P+}$ が，$\varphi \leq f$ を満たすとする．$K = \{k : \mu(D_k) = 1 > 0\}$ と置き, $k \in K$ に対して,

$$n_k = \min\left\{n : \exists B_k, |B_k| > \frac{1}{n},\ B_k \times \{1,2,\ldots,n\} \subset D_k\right\}$$

と置く．測度が正の場合, 自然数の集合に必ず 1 が含まれるので, $\{D_k\}$ が互いに素であることから $\{B_k\}_{k \in K}$ は互いに素である事が分かる．

$$a_k \leq \inf_{(x,n) \in D_k} f(x,n) \leq \frac{1}{n_k} < |B_k|$$

であることを用いると次が成り立つ事が分かる．

$$\mu(\varphi) = \sum_{k \in K} a_k \leq \sum_{k \in K} |B_k| \leq 1.$$

従って任意に設定したこの $\delta > 0$ に対して,

$$\int_{+}^{\mathrm{pan}} f \wedge \delta\, d\mu \leq \int_{+}^{\mathrm{pan}} f\, d\mu \leq 1.$$

逆に任意の $\delta > 0$ に対して

$$n_0 = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1, \quad \left(\delta > \frac{1}{n_0}\right)$$

と置く．各 $n \geq n_0 + 1$ および $k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して,

$$B_k = \left(\frac{k-1}{n-1}, \frac{k}{n-1}\right)$$

とすると，$|B_k| = \dfrac{1}{n-1} > \dfrac{1}{n}$ を満たす.

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\, 1_{C_k}, \quad C_k = B_k \times \{1,2,\ldots,n\}$$

と置くと, $\varphi \in \mathcal{S}^{P+}$ であり $\inf_{(x,n')\in C_k} f(x,n') = \dfrac{1}{n}$ より,

$$\varphi \le f \wedge \delta, \quad \mu(\varphi) = \frac{n-1}{n}$$

であるから $n \to \infty$ として，$\int_+^{\mathrm{pan}} f \wedge \delta d\mu \ge 1$ を得る. 従って任意の $\delta > 0$ で,

$$\int_+^{\mathrm{pan}} f \wedge \delta d\mu = 1.$$

$f \wedge \delta \to 0$ (一様, $\delta \to 0$), $\int\ 0\, d\mu = 0$ より一様収束定理は成り立たないことが分かる.

(d)　任意の $N \in \mathbb{N},\quad N \ge 2$ に対して

$$\int_+^{\mathrm{pan}} 1_X d\mu \ge \sum_{k=1}^{N-1} \mu\left(\left(\frac{k-1}{N-1}, \frac{k}{N-1}\right) \times \{1,2,\ldots,N\}\right) = N-1$$

が成り立つので, $\int_+^{\mathrm{pan}} 1_X d\mu = \infty$ となる.

定理 7 で示すように, 下からの連続性を持ち

$$\int^{\mathrm{pan}} 1_X d\mu < \infty \tag{1}$$

を満たす場合は, 一様収束定理が成り立つ. この例は (1) が成り立たない場合の反例であるので, この条件が Pan 積分の場合には一様収束定理に必要不可欠であることが分かる.

補題 6 $\int = \int_{+/\pm/\sigma+/\sigma\pm}^{\mathrm{pan}}$ とするとき, $\displaystyle\int 1_X d\mu = M < \infty$ であれば, 任意の可測関数 f(単関数が非負値の場合は $f \ge 0$) と $\delta > 0$ に対して次を満たす.

$$\int (f+\delta) d\mu \left(= \int (f + \delta 1_X) d\mu\right) \le \int f d\mu + \delta \int 1_X d\mu.$$

証明　任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次を満たす $\varphi \in \mathcal{S}$ が存在する.

$$\varphi \le f, \quad \mu(\varphi) \ge \int (f+\delta) d\mu - \varepsilon.$$

この $\varphi = \sum_k a_k 1_{A_k}$ に対して $\psi \in \mathcal{S}$ を次で定める.

$$\psi = \sum_k (a_k - \delta) 1_{A_k} \le f,$$

$$\left(\text{非負値単関数族の場合} \quad \sum_k ((a_k - \delta) \vee 0)\, 1_{A_k} \le f \right).$$

従って (いずれの場合でも) 次が成り立つ.

$$\int (f+\delta) d\mu - \varepsilon \le \mu(\varphi) < \mu(\psi) + \mu\left(\delta \sum_k 1_{A_k}\right) \le \int f d\mu + \delta \int 1_X d\mu.$$

$\varepsilon > 0$ の任意性より,

$$\int (f+\delta) d\mu \le \int f d\mu + \delta \int 1_X d\mu$$

を得る.

定理 7 μ を下から連続な単調測度, $\int = \int_{+/\pm/\sigma+/\sigma\pm}^{\mathrm{pan}}$ とするとき, $\displaystyle\int 1_X d\mu = M < \infty$ であれば, 一様収束定理が成り立つ.

証明　可測関数列 $\{f_n\}$ がある可測関数に一様収束し $\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0\right)$, $\int f_n d\mu$, $\int f d\mu < \infty$ を満たすとする. $\delta > 0$ を任意に固定し, 十分大きな n に対して

$$f - \delta \le f_n \le f + \delta$$

を, 非負単関数族の場合

$$(f-\delta) \vee 0 \le f_n \le f + \delta$$

を満たす. 補題 6 を用いて

$$\int f d\mu - \delta M \le \int f_n d\mu \le \int f d\mu + \delta M$$

を得るので, $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ を得る.

3.2　凹積分の一様収束定理

$\int = \int_{+/\sigma+}^{\mathrm{cav}}$ の場合は, 次の例に見るように, 一様収束定理は Pan 積分と同様の条件では成り立たないことが分かる.

例 8 $X = \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ 上に単調測度 μ を次で定める.

$$\mu(A) = 0 \quad = \begin{cases} 0, & \text{一点集合又は } 0 \notin A, \\ 1, & 2 \text{ 点以上かつ } 0 \in A. \end{cases}$$

$\mathbb{N}_0$ 上の関数を次で定める.

$$f_n(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{その他}. \end{cases}$$

このとき, 次を満たす.

(a)　μ は下から連続, 上から連続でない.

(b)　$\int_+^{\mathrm{cav}} 1_{\mathbb{N}_0} d\mu$, $\int_+^{\mathrm{pan}} 1_{\mathbb{N}_0} d\mu$, $< \infty$.

(c)　$f_n \searrow 1_{\{0\}}$.

(d)　全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_+^{\mathrm{cav}} f_n d\mu = 1 \ne \int_+^{\mathrm{cav}} 1_{\{0\}} d\mu = 0.$$

証明と解説　(a) $A_n \nearrow A$, $\mu(A) = 1$ のとき, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \in A_n$ かつ 2 点集合以上. 測度の定め方から $\mu(A_n) = 1$ となり, 下からの連続性が分かる. 他方, $A_n = \{0, n, n+1, \ldots\}$ と置くと

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\},\ \mu(A_n) = 1,\ \mu(\{0\}) = 0$$

を満たし, 上から連続でないことが分かる. ここまでは例 5 と同様の性質が成り立っている.

(b) $\varphi \left(= \sum_k b_k 1_{B_k}\right) \in \mathcal{S}^{C+}$, $\varphi \le 1 = 1_{\mathbb{N}_0}$ であるとすると,

$$\sum_{0\in B_k} b_k \le 1.$$

$0 \in B_k$ であれば $\mu(B_k) \le 1$, $0 \notin B_k$ であれば $\mu(B_k) = 0$. 従って

$$\mu(\varphi) = \sum_k b_k \mu(B_k) \le \sum_{0\in B_k} b_k \le 1.$$

よって, $\int^{\mathrm{cav}} 1_{\mathbb{N}_0} d\mu = 1 < \infty$. 例 5 では, 1_X の積分が有限では

なかったが, この場合は有限になる.

(c) は自明.

(d) $B_k = \{0, k\}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} 1_{B_k}$ と置くと,

$$\varphi_n \leq f_n,\ \mu(\varphi_n) = 1.$$

よって

$$\int_{+}^{\mathrm{cav}} f_n d\mu \geq 1.$$

$f_n \leq 1_{\mathbb{N}_0}$ より

$$\int_{+}^{\mathrm{cav}} f_n d\mu \leq \int_{+}^{\mathrm{cav}} 1_{\mathbb{N}_0} d\mu = 1.$$

よって $\int_{+}^{\mathrm{cav}} f_n d\mu = 1$.

$a_n 1_A \leq 1_{\{0\}}$ であれば, $A \subset \{0\}$, よって $\mu(A) = 0$. よって,

$$\int_{+}^{\mathrm{cav}} 1_{\{0\}} d\mu = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \int_{+}^{\mathrm{cav}} f_n d\mu.$$

これで, 1 の積分が有限でも一様収束定理は成り立つとは限らないことが分かった.

さらに, $\int_{\pm}^{\mathrm{cav}}$ を無理に考えると,

$$\psi = \left(\sum_{k=1}^{n} 1_{\{0,k\}}\right) - \left(n 1_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{n} 1_{\{k\}}\right) \in \mathcal{S}^{C\pm}$$

は関数として見るとき 0 であるから

$$\int_{\pm}^{\mathrm{cav}} 0 d\mu \geq \mu(\psi) = n \ \to \infty, \quad (n \to \infty)$$

となり, 積分は破綻 (関数が非負なら発散) している. このように, 状況によっては正負の値を取る単関数による積分は, 考えることができないことが分かる.

凹積分に関する一様収束定理は今のところ, 標準的な条件を与えるに至っていない. ただし, 関数列に次のような条件があれば示すことができる.

定理 9 μ を下から連続な単調測度, $\int = \int_{+/\sigma+}^{\mathrm{cav}}$ とするとき, 非負可測関数列 $\{f_n\}$ と可測関数 f が

$$\inf_{n\in\mathbb{N}, x\in X} f_n(x) = a > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

$$\int f_n d\mu, \int f d\mu < \infty$$

を満たすとき,

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

が成り立つ.

証明 $f(x) \geq a$ $(x \in X)$ より, 任意の $\delta \in (0, 1)$ に対して十分 $\varepsilon > 0$ を小さくとれば,

$$(1-\delta) f < f - \varepsilon < f + \varepsilon < (1+\delta) f$$

を満たすようにすることができる. 一様収束しているので, $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば, $n \geq N$ なる任意の n に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が全ての $x \in X$ で成り立つ. このとき同じ n に対して,

$$(1-\delta) f < f_n < (1+\delta) f$$

を満たす. 従って

$$(1-\delta) \int f d\mu \leq \int f_n d\mu \leq (1+\delta) \int f d\mu$$

を得る. $\delta \to 0$ として求める結果を得る.

4. 単調収束定理

この節では単調増加収束定理および単調減少収束定理について議論する. 本稿で扱う積分は近似の方向によって性質が異なる. 加法性のない集合関数を考えているため, 上下からの近似で積分が同じになることは一般的には期待できない. 先に述べたように, 現在証明されている単調収束定理は, 下からの近似の場合は単調増加, 上からの近似の場合は単調減少が主で, 逆向きのものは特殊な条件下で例外的に成り立つに過ぎない.

近似の方向と収束定理の方向がそろっているという意味で, 例えば Pan 積分 ($\int^{\mathrm{pan}}$) の単調増加収束定理と, SD 積分 ($\int^{\mathrm{sd}}$) の単調減少収束定理は双対的に見ることができるが, 実際の証明は方針が少し異なる. Pan 積分で単関数族が正負の値を取る場合, 符号を変えることで SD 積分に対応させることができる. (この節で議論する.) しかし, 当初それぞれの積分は非負の関数を対象としている. 正負を逆転させると, 非負の関数に対する Pan 積分は, 非正の関数に対する SD 積分に対応するので, 非負値の関数を対象にする場合, 関数族が異なることになる. この節では双対的な立場での, 正負両方の値を許す立場と, 非負値のみ (方向ごとで意味が異なる) の両方の立場から議論をする.

4.1 Pan, 凹 積分の単調増加収束定理

下からの近似の積分に対する単調増加収束定理では, ほぼ統一的な証明を与えることができる. 代表的な特徴として, 可算和まで許す場合に次の性質をよく用いる. 測度論における基本性質である優収束定理 ([8] などを参照) から直ちに得られる性質であるが, 頻出するため補題の形で準備をしておく.

補題 10 2 つの数列と数列の列 $\{a_k\}_k$, $\{x_k\}_k$, $\{\ \{x_k^{(n)}\}_k\ \}_n$ が

(a) 全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して $a_k \geq 0$, $\sum_k a_k < \infty$,

(b) 全ての $n, k \in \mathbb{N}$ に対して $|x_k^{(n)}| \leq a_k$,

(c) 全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$

を満たすとき,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k x_k^{(n)} = \sum_k x_k$$

が成り立つ.

非負関数族から定まる積分に対しては次の定理が成り立つ.

定理 11 $\int = \int_{+/\sigma+}^{\mathrm{pan/cav}}$ に対して, 単調増加収束定理が成り立つ. すなわち非負単調増加関数列 $\{f_n\}$ に対し, 極限を $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ と定める. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

が成り立つ.

証明 $M = \int f d\mu$ と置く. 任意の $\varepsilon > 0$ ($M = \infty$ の場合は, 任意の $M' > 0$) に対して, 次を満たすような $\varphi \in \mathcal{S}$ を取ることができる. (以下 ( ) の中で $M = \infty$ の場合のことを記述するものとする.)

$$\varphi \leq f, \quad \mu(\varphi) > M - \varepsilon \quad (\mu(\varphi) \geq M').$$

$\delta > 0$ を任意に固定し,

$$A_n^{(\delta)} = \{x | f_n(x) \geq f(x)(1-\delta)\}$$

と置く．このとき $A_n^{(\delta)} \nearrow X\ (n \to \infty)$.

$$\varphi_n = (1-\delta)\varphi 1_{A_n^{(\delta)}}$$

により $\varphi_n \in \mathcal{S}$ を定めると，$\varphi_n \leq f_n$ を満たす．実際 $\varphi = \sum_k b_k 1_{B_k}$ と表されたとすると

$$\varphi_n = \sum_k b_k (1-\delta) 1_{B_k \cap A_n^{(\delta)}}$$

と表現される．可算和の場合

$$\sum_k b_k (1-\delta)\mu(B_k \cap A_n^{(\delta)}) \leq \sum_k b_k \mu(B_k) < \infty$$

も成り立つ．$x \in A_n^{(\delta)}$ であれば

$$f_n(x) \geq (1-\delta) f(x) = (1-\delta) f(x) 1_{A_n^{(\delta)}}.$$

$x \in A_n^{(\delta)c}$ であれば $\varphi_n = 0$ より不等式は自明．以上より $\varphi_n \leq f_n$ を得る．従って各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int f_n d\mu \geq \mu(\varphi_n) = \sum_k (1-\delta) b_k \mu(B_k \cap A_n^{(\delta)}) \tag{2}$$

が成り立つ．$\int f_n d\mu$ は非負単調非減少なので

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq 0$$

により極限 $\alpha \leq \infty$ を定めることができる．右辺は

$$x_k^{(n)} = (1-\delta) b_k \mu(B_k \cap A_n^{\delta}),\ a_k = x_k = (1-\delta)\mu(B_k)$$

として 補題 10 を用いると，$n \to \infty$ のとき次が成り立つ．

$$(2)\ \text{の右辺} \to (1-\delta)\sum_k b_k \mu(B_k) > (1-\delta)\left(\int f d\mu - \varepsilon\right).$$

$$\left((2)\ \text{の右辺} \to (1-\delta)\sum_k b_k \mu(B_k) \geq (1-\delta) M'\right).$$

$\varepsilon, \delta \searrow 0$ として $\alpha \geq \int f d\mu$ を得る．($M = \infty$ の場合は $M' \to \infty$ として発散することが分かる.) 逆向きの不等号は単調性より明らかなので，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

を得る．

負の値も許す単関数族を考える場合には次の定理が成り立つ．この場合 $\int 1_X d\mu < \infty$ の条件が加えて必要になるところが特徴である．

定理 12 μ は $\emptyset$ で連続，かつ下から連続であるとする．$\int = \int_{\pm,\sigma\pm}^{\text{pan}}$ に対して，$\int f_1 d\mu > -\infty$, $\int 1_X d\mu < \infty$ であれば，単調増加収束定理が成り立つ．すなわち単調増加関数列 $\{f_n\}$ に対し，極限を $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ と定めるとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

が成り立つ．

証明 $M = \int f d\mu$ と置く．任意の $\varepsilon > 0$ ($M = \infty$ の場合は，任意の $M' > 0$) に対して，次を満たすような $\varphi \in \mathcal{S}$ を取ることができる．(以下 ( ) の中で $M = \infty$ の場合のことを記述するものとする．)

$$\varphi \leq f, \quad \mu(\varphi) > M - \varepsilon \quad (\mu(\varphi) \geq M').$$

また $\int f_1 d\mu > -\infty$ より，$\varphi_0 \leq f_1$ かつ $\mu(\varphi_0) > -\infty$ を満たす $\varphi_0 \in \mathcal{S}$ が存在する．

$$\varphi = \sum_k b_k 1_{B_k}, \quad \varphi_0 = \sum_k c_k 1_{C_k}$$

と表わされたとする．

$\delta > 0$ を任意に固定し，

$$A_n^{(\delta)} = \{x | f_n(x) \geq f(x) - \delta\}$$

により $A_n^{(\delta)}$ を定める．上の φ に対して

$$\begin{aligned}\varphi_n &= (\varphi - \delta) 1_{A_n^{(\delta)}} + \varphi_0 1_{A_n^{(\delta)\,c}} \\ &= \sum_k (b_k - \delta) 1_{B_k \cap A_n^{(\delta)}} + \sum_k c_k 1_{C_k \cap A_n^{(\delta)c}}\end{aligned}$$

により，$\varphi_n\ (n \geq 1)$ を定めると，$\varphi_n \in \mathcal{S}$ を満たす．Pan 積分に関する単関数なので，対応する集合族が互いに素でなければならないが，$A_n^{(\delta)}$ と $A_n^{(\delta)c}$ で分離しているので，この条件も満たしている．さらに $A_n^{(\delta)}$ の定義および $\varphi_0 \leq f_1 \leq f_n$ より，

$$\varphi_n(x) = \varphi 1_{A_n^{(\delta)}}(x) + \varphi_0 1_{A_n^{(\delta)c}}(x) \leq f_n(x)$$

も満たしている．従って $\mu(\varphi_n) \leq \int f_n d\mu$ を満たす．このとき

$$\begin{aligned}\mu(\varphi_n) &= \sum_k (b_k - \delta)\mu(B_k \cap A_n^{(\delta)}) + \sum_k c_k \mu(C_k \cap A_n^{(\delta)c}) \\ &= \sum_k b_k \mu(B_k \cap A_n^{(\delta)}) - \delta \sum_k \mu(B_k \cap A_n^{(\delta)}) \\ &\quad + \sum_k c_k \mu(B_k \cap A_n^{(\delta)c}).\end{aligned} \tag{3}$$

補題 10 より $n \to \infty$ のとき (可算和の場合も合わせて)

$$\sum_k b_k \mu(B_k \cap A_n^{(\delta)}) \to \sum_k b_k \mu(B_k),$$

$$\sum_k c_k \mu(B_k \cap A_n^{(\delta)c}) \to 0.$$

また

$$\sum_k \mu(B_k \cap A_n^{(\delta)}) \leq \int 1_X d\mu.$$

従って十分大きな n に対して

$$\int f_n d\mu > \mu(\varphi_n) \geq \int f d\mu - \delta \int 1_X d\mu - 2\varepsilon$$

が成り立つ．従って $\lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int f d\mu$ が成り立つ．

負の値を許す場合は，符号を入れ替えることによって Pan 積分は SD 積分に対応することができる．この意味で上の定理は，負の値を許す場合の SD 積分に関する単調減少収束定理とも見ることができる．凹積分でも同様の議論ができれば，双対的な状況を作り出すことができるが，例 8 で見たように，0 の積分が発散してしまう場合もあり，多くの関数に対して有限な積分値を定められないことが一般には起こる．

4.2 SD 積分，凸積分の単調減少収束定理

非負の SD 積分，凸積分の単調減少収束定理は，定理 11 の双対版に見えるが，その証明の細部には相違点が様々見られる．

これは正の Pan 積分, 凹積分の符号を変えると負の値を取る関数族を考えることになるので, 異なる関数族に関する議論であることが原因と思われる.

補題 13 μ は $\emptyset$ において連続, $\int = \int_{+/\sigma+}^{\mathrm{sd/vex}}$ とする. 非負可測関数 f と 単調減少可測集合列 $\{A_n\}$ が,

$$\int f d\mu < \infty, \quad \bigcap_n A_n = \emptyset, \quad (A_n \searrow \emptyset)$$

を満たすとき,

$$\int f 1_{A_n} d\mu \searrow 0$$

を満たす.

証明　$\int f d\mu < \infty$ であることと, $\varphi \geq f$, $\mu(\varphi) < \infty$ を満たす単関数 $\varphi = \sum_k b_k 1_{B_k} \in \mathcal{S}$ が存在することが同等である.

$$f 1_{A_n} \leq \varphi 1_{A_n} = \sum_k b_k 1_{B_k \cap A_n}$$

であるから,

$$\int f 1_{A_n} d\mu \leq \mu(\varphi 1_{A_n}) = \sum_k b_k \mu(B_k \cap A_n)$$

を満たす. μ の $\emptyset$ における連続性より, 全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu(B_k \cap A_n) \searrow 0, \quad (n \to \infty)$$

であるので, 補題 10 を用いて,

$$\int f 1_{A_n} d\mu \leq \sum_k b_k \mu(B_k \cap A_n) \searrow 0$$

を得る.

この補題を用いると次の定理を得る.

定理 14 μ は $\emptyset$ において連続かつ下から連続, $\int = \int_{+/\sigma+}^{\mathrm{sd/vex}}$ とする. 非負可測関数列 $\{f_n\}$ と非負可測関数 f が

$$f_n \searrow f, \quad \int f_1 d\mu < \infty$$

を満たせば,

$$\int f_n d\mu \searrow \int f d\mu$$

を満たす.

証明　補題 3 より次の不等式が成り立つ.

$$\int f_n d\mu \leq \int f_n 1_{\{f=0\}} d\mu + \int f_n 1_{\{f>0\}} d\mu \tag{4}$$

$\int f_1 d\mu < \infty$ より, $\varphi_0 \geq f_1$, $\mu(\varphi_0) < \infty$ を満たす $\varphi_0 \in \mathcal{S}$ が存在する. これらを用いてまず $\int f_n 1_{\{f=0\}} d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$ を示す.

$$\begin{aligned} &\int f_n 1_{\{f=0\}} d\mu \\ &\leq \int f_n 1_{\{f=0\}} 1_{\{f_n \leq \varepsilon\varphi_0\}} d\mu + \int f_n 1_{\{f=0\}} 1_{\{f_n > \varepsilon\varphi_0\}} d\mu \\ &\leq \int \varepsilon\varphi_0 1_{\{f=0\}} 1_{\{f_n \leq \varepsilon\varphi_0\}} d\mu + \int f_1 1_{\{f=0\}} 1_{\{f_n > \varepsilon\varphi_0\}} d\mu. \end{aligned} \tag{5}$$

ここで, $f_n(x) > 0$ であれば $f_1(x) > 0$ であるから, $f(x) = 0$ を満たす x に対しては, 十分大きな n に対して $f_n(x) \leq \varepsilon\varphi_0(x)$ を満たす. 従って,

$$\{x : f_n(x) > \varepsilon\varphi_0(x)\} \searrow \emptyset$$

を満たす. 補題 10 を用いて (5) の第 2 項 $\to 0$ となる.

$$(5) \text{ の第 1 項} \leq \varepsilon\mu(\varphi_0) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

となり $\int f_n 1_{\{f=0\}} d\mu \to 0$ を得る.

次に $\int f_n 1_{\{f>0\}} d\mu \to \int f d\mu$ を示す. 任意に $\delta > 0$ を固定して,

$$A_n^{(\delta)} = \{x : f_n(x) \leq (1+\delta) f(x)\}$$

と置く. このとき,

$$A_n^{(\delta)} \cap \{x : f(x) > 0\} \nearrow \{x : f(x) > 0\}$$

を満たすので,

$$\begin{aligned} &\int f_n 1_{\{f>0\}} d\mu \\ &\leq \int f_n 1_{\{f>0\}} 1_{A_n^{(\delta)}} d\mu + \int f_n 1_{\{f>0\}} 1_{A_n^{(\delta)c}} d\mu \\ &\leq (1+\delta) \int f 1_{\{f>0\}} 1_{A_n^{(\delta)}} d\mu + \int f_1 1_{\{f>0\} \cap A_n^{(\delta)c}} d\mu \\ &\leq (1+\delta) \int f d\mu + \int f_1 1_{\{f>0\} \cap A_n^{(\delta)c}} d\mu. \end{aligned}$$

補題 13 より上式第 2 項は 0 に収束する. 従って

$$\inf_n \int f_n 1_{\{f>0\}} d\mu \leq (1+\delta) \int f d\mu \to \int f d\mu, \quad (\delta \searrow 0).$$

逆向きの不等号は自明なので

$$\inf_n \int f_n 1_{\{f>0\}} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n 1_{\{f>0\}} d\mu = \int f d\mu$$

となり求める結果を得る.

4.3 下からの近似の単調減少収束定理

Pan 積分や 凹積分でも, 特殊な状況下では単調減少収束定理が成り立つ. 以下その条件をいくつか述べる.

初めに, 測度が劣加法的な場合を考える. この場合, 集合を細かく分けたほうが測度の和が大きくなるので, 次の性質が成り立つ.

補題 15 単調測度 μ が劣加法的であるとき, すなわち,

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

が成り立つとする. このとき, 任意の非負可測関数 f に対して,

$$\int_{+}^{\mathrm{pan}} f d\mu = \int_{+}^{\mathrm{cav}} f d\mu, \int_{\sigma+}^{\mathrm{pan}} f d\mu = \int_{\sigma+}^{\mathrm{cav}} f d\mu$$

が成り立つ.

また劣加法的な単調測度空間での Pan 積分に関しては, 次の意味の線形性が成り立つ ([9]). 正確には, 単関数が有限和の場合に証明されているものであるが, 同様の議論で可算和の場合も示すことができる.

定理 16 *(Yao Ouyang, Jun Li, Radko Mesiar [9])*　単調測度 μ が劣加法的であるとし, $\int = \int_{+/\sigma+}^{\mathrm{pan}}$ であるとする. このとき 任意の非負可測関数 f, g と 正の定数 a, b に対して,

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$$

が成り立つ.

補題 17 $\int = \int_{+/\sigma+}^{\mathrm{pan}}$, $A_n \searrow \emptyset$, $\int f d\mu < \infty$ であるとき,

$$\int f\,1_{A_n}d\mu \searrow 0$$

が成り立つ.

証明　補題 3 (a) より,

$$\int f\,d\mu \geq \int f\,1_{A_n^c}d\mu + \int f\,1_{A_n}d\mu.$$

定理 11 より, $\int f 1_{A_n^c}d\mu \to \int f d\mu$. よって $n \to \infty$ として

$$\int f d\mu \geq \int f d\mu + \lim_{n\to\infty}\int f\,1_{A_n}d\mu \geq \int f d\mu.$$

よって $\lim_{n\to\infty}\int f\,1_{A_n}d\mu = 0$ を得る.

次の定理は Pan 積分に対して証明を与えるが, 上の補題 15 より同時に凹積分に対しても成り立つことになる.

定理 18 単調測度 μ が劣加法的であるとき, $\int = \int_{+/\sigma+}^{\text{pan/cav}}$ であれば, 単調減少収束定理が成り立つ. すなわち, 非負可測関数列 $\{f_n\}$ と非負可測関数 f が

$$f_n \searrow f, \quad \int f_1 d\mu < \infty$$

を満たせば,

$$\int f_n d\mu \searrow \int f d\mu$$

が成り立つ.

証明　補題 15 より, Pan 積分として証明を与えてよい.

任意の $\delta > 0$ を固定して考える.

$$A_n^{(\delta)} = \{x : f_n(x) \leq f(x) + \delta f_1(x)\}$$

と置く. 関数列 $\{f_n\}$ は非負単調減少なので, $f_1(x) = 0$ であれば $f(x) = f_n(x) = 0$ となるので, $A_n^{(\delta)} \nearrow X\ (n \to \infty)$ を満たす.

$$\begin{aligned}\int f_n d\mu &= \int f_n\,1_{A_n^{(\delta)}} + f_n\,1_{A_n^{(\delta)\,c}}d\mu \\ &\leq \int (f + \delta f_1)\,1_{A_n^{(\delta)}}d\mu + \int f_1\,1_{A_n^{(\delta)\,c}}d\mu \\ &\leq \int f\,1_{A_n^{(\delta)}}d\mu + \delta\int f_1 d\mu + \int f_1\,1_{A_n^{(\delta)\,c}}d\mu.\end{aligned}$$

上式 第 1 項は単調増加収束定理 (定理 11) より, $\int f d\mu$ に収束する. 補題 17 および $\delta > 0$ の任意性より

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \inf_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

を得る. 逆向きの不等号は自明なので.

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu$$

が成り立つことが分かる.

Pan 積分の場合, 劣加法性が成り立たない場合でも, 関数列が 0 に収束する場合は単調減少収束定理が成り立つ.

定理 19 $\int = \int_{+/\sigma+}^{\text{pan}}$ とする. μ を $\emptyset$ においての連続性を持つ単調測度で, $\int 1_X d\mu < \infty$ を満たすとする. このとき, 非負可測関数列 $\{f_n\}_n$ が, $\int f_1 d\mu < \infty$, $f_n \searrow 0, \quad (n \to \infty)$ を満たせば,

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = 0$$

が成り立つ.

証明　任意の $\delta > 0$ を固定する.

$$A_n^{(\delta)} = \{x : f_n(x) > \delta\}$$

と置くと, $A_n^{(\delta)} \searrow \emptyset$ を満たす. $\varphi = \sum_k b_k 1_{B_k} \in \mathcal{S}$ を $\varphi \leq f_n$ を満たす任意の単関数とする.

$$\mu(\varphi) = \sum_k b_k\mu(B_k) = \sum_{b_k \leq \delta} b_k\mu(B_k) + \sum_{b_k > \delta} b_k\mu(B_k)$$

であるが, $b_k > \delta$ であれば $\inf_{x\in B_k} f(x) \geq b_k > \delta$ より, $B_k \subset A_n^{(\delta)}$ を満たすので,

$$\begin{aligned}\text{右辺} &\leq \delta\sum_k \mu(B_k) + \int f_n 1_{A_n^{(\delta)}}d\mu, \\ &\leq \delta\int 1_X d\mu + \int f_1 1_{A_n^{(\delta)}}d\mu.\end{aligned}$$

μ の $\emptyset$ における連続性から $\mu(A_n^{(\delta)}) \to 0\ (n \to \infty)$. 従って補題 17 より第 2 項は 0 に収束する. よって

$$\inf_n \int f_n d\mu \leq \delta\int 1_X d\mu \to 0, \quad (\delta \searrow 0)$$

より求める結果を得る.

5. まとめ

分割型積分に対する収束定理について, 単関数族の係数の符号, 和の有限/可算 (無限), 集合族の共通部分の有無の別毎に状況を整理した. 一様収束定理に関しては, 単関数における集合族が分割かどうか ($\int^{\text{pan/sd}}/\int^{\text{cav/vex}}$) の違いで相違がみられた. Pan 積分の場合は $\int 1_X d\mu < \infty$ であることが必要不可欠な条件であることが分かり, この場合には負の値を許す単関数族に関して, 下からの近似の場合の単調増加収束定理と上からの近似の場合の単調減少収束定理との双対性も見られた. この性質との対比で, 非負の単関数族におけるそれぞれの収束定理が, 別の方針で証明される意味合いも明らかになった. 今後これらの積分を用いた 関数解析的な手法の検討をしていきたいと考えている.

謝辞

例 5 は富山市在住の増田貴生氏により考案され, 私的に提供して頂いたものである. この例により一様収束定理の条件に関する新たな視点を得た. ここに感謝の意を表する.

参 考 文 献

[1] 藤本勝成: "入門: ファジィ測度とその周辺 - 第 3 回:価値を表すファジィ測度 (1)" (解説), 日本知能情報ファジィ学会誌, Vol.20, No. 4, pp.601-608, 2008.

[2] 尾崎裕之: "経済動学における非加法的測度" (解説), 日本知能情報ファジィ学会誌, Vol.26, No. 4, pp.132-141, 2014.

[3] Aoi Honda and Yoshiaki Okazaki: "Generalization of inclusion-exclusion integral for nondiscrete monotone measure space", Fuzzy Sets and Systems Vol. 355, No.15, pp. 42-58, 2019.

[4] 河邊淳: "A unified approach to convergence theorems of distribution-based nonlinear integrals", 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会（於：岡山大学）実函数論分科会 (特別講演) 予稿, pp.41-52 , 2018.

[5] Q. Yang: "The pan-integral on the fuzzy measure space", Fuzzy Mathematica (in Chinese), Vol. 3, pp. 107-114,1985.

[6] E. Lehrer: "A new integral for capacities", Economic Theory, Vol39, pp. 157-176, 2009.

[7] R. Mesiar, J. Li, and E. Pap: "Superdecomposition integrals", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 259, pp. 3-11, 2015.

[8] Terence. Tao: “An Introduction to Measure Theory”, Graduate Studies in Mathematics Vol. 126, American Mathematical Society, 2011.

[9] Yao Ouyang, Jun Li, and Radko Mesiar: “On linearity of pan-integral and pan-integrable functions space”, International Journal of Approximate Reasoning archive, Vol.90 Issue C, pp. 307-318, 2017.

[10] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明: “分割型非線形積分の収束定理” (解説), 日本知能情報ファジィ学会誌, Vol. 31, No. 4, pp. 108-115, 2019.

[11] Qiang Zhang, Radko Mesiar, and Jun Li,Peter Struk: “Generalized Lebesgue integral”, International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 52, pp. 427-443, 2011.

［問い合わせ先］
〒870-1192 大分市大字旦野原 700
大分大学理工学部
福田亮治
E-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp

著　者　紹　介

福田　亮治［正会員］

大分大学・理工学部・教授
専門：非加法的測度, 非線形積分, 視覚障碍者支援
所属学会：日本数学会, 日本知能情報ファジィ学会,

本田　あおい［正会員］

九州工業大学情報工学研究院准教授, 非加法的測度論, 情報数理, 測度論や統計的手法に基づくビッグデータ解析及びバナッハ空間の幾何学
所属学会：日本数学会, 日本知能情報ファジィ学会, 日本応用数理学会, 日本オペレーションズ・リサーチ学会

岡崎　悦明［正会員］

ファジィシステム研究所・特別研究員
九州工業大学名誉教授
専門：非加法的測度, 非線形積分, 実解析学, 関数解析学
所属学会：日本知能情報ファジィ学会, 電子情報通信学会, 日本数学会

Comparison of Decomposition type Nonlinear Integrals Based on the Convergence Theorem

by

Ryoji Fukuda, Aoi Honda, and Yoshiaki Okazaki

Abstract:

We consider several nonlinear integrals with respect to the monotone measures. We term the integrals defined by certain approximations via simple functions as decomposition type integrals. This category is classified based on the approximation directions (from above/below) and the disjointness of corresponding measurable set families (partition/covering). Furthermore, we add two classification points: finiteness of the summation (finite/countable) and sign of coefficients (non-negative/signed). This study aims to clarify the essential features of these integrals by considering several convergence theorems for each group of the decomposition type integrals.

Keywords: monotone measure, non-linear integral, convergence theorem

Contact Address: **Ryoji Fukuda**
700 Dan-noharu, Oita 870-1192 Japan
E-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp