

非離散空間上の k -加法的測度の解析

Analysis of Non-Discrete k -Additive Measures

○¹ 福田亮治,

² 本田あおい,

³ 岡崎 悦明

○¹ Ryoji Fukuda,

² Aoi Honda,

³ Yoshiaki Okazaki

¹ 大分大学 理工学部 ² 九州工業大学情報工学部 ³ ファジィシステム研究所

Abstract: There are two generalizations for non discrete k -additive non-additive measures: “Constructive k -additive measure” and “Formulaic k -additive measure”. We have proposed some new concepts and found some their properties: some sufficient conditions for monotone decreasing convergence theorems, some equivalent conditions for formulaic k -additivity, an equivalent condition for each k -additivity for a distorted measure, and some relation of two k -additivity. In this report we will give explanations about them.

1 はじめに

さまざまな対象を解析する上で用いられる集合関数は一般に加法性があることが期待できない。測度論を基本とした枠組みの一般化としてこれを扱う場合、加法性の欠如は様々な解析を困難にしている。有限集合上の非加法的測度の場合、表現する場合のパラメータ数の増加がまず初めにあげられる。一般に n 点集合上の (加法性を持つ) 測度は、 n 個のポイントマス (1 点集合の測度) を定めれば良いので自由度は n であるが、加法性の条件が無くなると、 $\emptyset$ で 0 になるという条件がある場合 $2^n - 1$ 個の数値が自由に变化できることになり、例えば同定する問題などは、数十個の要素で現実的には計算ができなくなる。集合関数に対するメビウス変換は、集合ごとの値を定めて、集合関数のそれぞれの値がそれらの和の形で表現できるように定めたものと見ることができる。 k -加法性 ($k \in \mathbb{N}$) はメビウス変換の集合ごとの値が、 k 個以下の集合に対応する値のみで集合関数が表現されることを意味する。従ってこの方法での集合関数の表現には、データ数に対して k 次の多項式オーダーのパラメータで済むことになる。

この報告では、非離散的な非加法的測度に対する k -加法性に対して、我々が与えた 2 つの定義およびそれらの性質を紹介する。我々の定義する k -加法性は有限集合上の非加法的測度を全て含む概念として位置付けられる。無限集合上で考える場合、先に述べたパラメータ数の増加に関する k -加法的測度のメリットは意味がないので受け継ぐべき特徴が何かということは、明確でないのかもしれない。実際、我々の行きついたひとつの非離散化である、構成的な k -加法的な測度の定義は、本質的にほぼ同等の定義が、R. Mesiar ([1]) により 1999 年に与えられているがその後この考え方をういた議論はあまりない。我々は k -加法性の非離散化に対して、有限集合上の集合関数の自然な拡張と解析のしやすい構造の両面を考慮して、構成的な方法と、定式的な方法の 2 通りの方法を試みてきた ([4],[5])。正確な定義は次節以降に譲るとして、大まか

に言えば構成的な k -加法測度は、 k 次の直積空間上の加法的測度を用いて表現される集合関数であり、定式的な k -加法測度は非離散化されたメビウス変換を用いて定義される。

構成的な k -加法的測度は、測度や積分の値の評価がしやすいと思われる。基本的には σ -加法的な測度を用いて表現されているので、それらの特徴を生かした解析が可能である。非加法的な測度に関する積分に関して、近年我々は単調収束定理に関して議論してきた。特に、Pan 積分などの分割型積分に関して、単調増加/減少の収束定理が成り立つ条件がさまざま見つかった ([2],[3])。Pan 積分に対しては標準的な条件の下、単調増加収束定理が示されているが、単調減少収束定理はかなり特殊な場合のみにしか成り立たない。しかし、 k -加法性の前提の下では、Pan 積分に関しては一様有界であれば、単調減少収束定理を示すことができる。 ([4] 参照。)

定式的な k -加法性の定義に用いるメビウス変換は、多変数の集合関数の集合 $\{\nu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ として定まる。 ν_j は j 個の互いに素な集合を変数とする集合関数で、 j 次の調整関数と呼ぶことにする。有限集合上の単調測度 (非加法的) に対して定まるメビウス変換は、集合ごとに実数値が対応することになるが、 ν_j は要素が j 個の集合に対するメビウス変換に相当する概念になっている。従って、自然な k -加法性の非離散的拡張を $\nu_j = 0$ が $j > k$ で成り立つことで定義している。加えて ν_k が $k-1$ 個の集合を固定したとき加法性を持つことなど、幾つかの同値条件が与えられる。非加法的な測度の代表的な例として、確率測度と単調増加関数の合成で表される集合関数である変形確率 (distorted probability) がある。変形確率とは、原点で 0 となる単調増加関数 f と確率測度 m を用いて $\mu(A) = f(m(A))$ と表される集合関数のことである。このような集合関数に対しては、適当な条件の下で k -加法性と f が k 次の多項式であることが同等であるという結果を得た。 ([5] 参照。)

一般に、構成的な k -加法的測度は定式的な k -加法性を

持つ。さらに、確率測度から導かれる測度 $f(m(A))$ に対しては、構成的な k -加法性と定式的な k -加法性は同等である。一般には、定式的な k -加法性に、測度のある種の強い連続性や有界変動に相当する性質を仮定することで、定式的な k -加法測度から、構成的 k -加法測度に対応する直積集合上の σ -加法的測度を作ることができる。このようにこれらの2つの k -加法性はほぼ同一の概念として扱えると考えられる。([6] 参照。)

先に述べたように、 k -加法的測度は有限集合上の非加法的測度を全て含む概念となるため、例えば劣/優加法性等の条件は一般に成り立たない。(両方を含むものとなる。)

測度収束や L_p 空間の議論などでは、例えば完備性の問題など解決しなければならない問題を数多く含む。しかし解析の足掛かりとなりうる構造をもつため、与えられた問題に対して議論の余地が見つけやすいと考えられる。今後それらの問題を解決していくことで様々な解析の基礎となる概念として発展させていきたいと考えている。

2 2つの k -加法性

以下 $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とし、 μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数とする。この報告では、集合関数 μ は、 $\mu(\emptyset) = 0$ を満たすことを仮定する。 μ が単調性 ($A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$) を満たす場合、単調測度という。

X の個数 j 個の部分集合の空間を

$$X^{(j)} = \{\{x_1, x_2, \dots, x_j\} \subset X : x_i \neq x_\ell, i \neq \ell\}$$

と置く。可測空間としては、直積と並べ替えの同一視(商空間)に対応する σ -集合体を考える。集合演算として、 $A \in \mathcal{B}$ に対して、

$$A^{(j)} = \{\{x_1, x_2, \dots, x_j\} \subset A : x_i \neq x_\ell, i \neq \ell\}$$

$A, B \in \mathcal{B}$ ($A \cap B = \emptyset$) に対して、

$$A(\times)B = \{\{x_1, x_2\} : x_1 \in A, x_2 \in B\}$$

と定める。

定義 1 可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ が、構成的な k -加法的測度であるとは、各 $j \leq k$ に対して $X^{(j)}$ 上の(符号付き)実測度 μ_j が存在して

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^k \mu_j(A^{(j)})$$

を満たすこととする。ここで扱う実測度は、 $\pm\infty$ を許さないものとする。従って μ 自体も有限値しか取り得ない。

有限集合 X 上の集合関数 μ のメビウス変換を $\{\nu_B\}_{B \subset X, B \neq \emptyset}$ とするとき $U \subset X^{(j)}$ ($j \leq |X|$) に対して

$$\mu_j(U) = \sum_{B \in U} \nu_B$$

により μ_j は $(X^{(j)}, 2^{X^{(j)}})$ 上の測度となり、

$$\mu(A) = \sum_{B \subset A} \nu_B = \sum_{j=1}^{|X|} \mu_j(A^{(j)})$$

を満たすことが分かる。従って有限集合上の集合関数は全て構成的 k -加法的測度である ($k = |X|$)。

定式的な k -加法的測度を定義するためにメビウス変換の一般化を次で与える。可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の集合関数 μ を固定する。 $j \in \mathbb{N}$ と互いに共通部分を持たない j 個の可測集合 $A_1, A_2, \dots, A_j$ を考え、 j 及び互いに素な j 個の集合ごとに実数 $\nu_j(A_1, A_2, \dots, A_j)$ が対応するものとする。集合関数列 $\{\nu_j\}$ は次のように定める。

定義 2 (i) $\nu_1(A) = \mu(A)$.

$$(ii) \nu_j(A_1, \dots, A_j) = \mu\left(\bigcup_{\ell=1}^j A_\ell\right) - \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_\ell < j} \nu_\ell(A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell}).$$

この関数 ν_j を j 次の調整関数と呼び、 $\{\nu_j\}$ をメビウス変換と呼ぶことにする。調整関数は、 j 個の変数に対して対称的であり、一つの集合が空集合であれば、値が0になる。この集合関数を用いて k -加法性を次で定める。

定義 3 μ を集合関数、 $j \in \mathbb{N}$ ごとに ν_j を j 次の調整関数とする。このとき、 μ が定式的 k -加法的測度であるとは、 $\forall j > k$ に対して $\nu_j = 0$ をみたすこととする。

$A_1, \dots, A_j$ が全て1点集合になった場合が、従来のメビウス変換に相当するので、 X が有限集合の場合は μ は定式的な意味でも k -加法的である ($k = |X|$)。従っていずれの k -加法性も、有限集合の場合をすべて含む概念となっている。

3 Pan 積分の単調減少収束定理

この報告では、単関数近似による積分である分割型積分の中で下からの近似を用いる Pan 積分について考える。ここでいう単関数 φ 及び対応する単調測度 μ に関する基本和 $\mu(\varphi)$ は、有限個の可測集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ と同数の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ を用いて

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j 1_{A_j}, \quad \mu(\varphi) = \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j)$$

のようにあらわされる．単調測度には一般に加法性がないので，単関数が関数として同じでも基本和 $\mu(\varphi)$ が同じであるとは限らない．そこで，可測集合と実数のペアの集まりを単関数としてとらえるようにする．さらにその単関数族を用いて積分を次のように定義する．

定義 4 単関数族を念頭に置いて $\mathcal{S}^p$ を次のように定める．

$$\mathcal{S}^p = \{(a_i, A_i)_{i=1}^n, a_i \in [0, \infty), A_i \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}, \\ \{A_i\}_{i=1}^n \text{ } X \text{ の分割 } X\}.$$

与えられた単調測度 μ および 非負可測関数 f に対して，Pan 積分 $\int^{\text{pan}} f d\mu$ ，を次で定める．

$$\int^{\text{pan}} f d\mu = \sup\{\mu(\varphi) : \varphi \in \mathcal{S}^p, \varphi \leq f\}.$$

構成的 k -加法性がある場合，この Pan 積分に対して次のように単調減少収束定理が成り立つ．

定理 5 $\{f_n\}$ 単調減少な可測関数列， μ が $(X, \mathcal{B})$ 上の構成的 k -加法的測度でとする．($k \in \mathbb{N}$)，ある $M > 0$ に対して $f_n(x) \leq M < \infty$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ と $x \in X$ で満たす場合， $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ，に対して，次が成り立つ．

$$\int^{\text{pan}} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int^{\text{pan}} f_n d\mu.$$

Pan 積分の単関数族を，分割ではなく交わりを許す被覆に変えたものは，凹積分と呼ばれる積分である ([8])．この場合は，単調減少収束定理は，同じ条件の下で上のように一般的には成り立たないが，0 に収束する単調減少列については示すことが出来る ([5])．

4 定式的 k -加法性と変形確率測度

定式的 k -加法性は次のような同値な条件がある．

定理 6 μ を集合関数とし， $\{\nu_j\}$ を μ のメビウス変換 (調整関数の列) とするとき，次は同値である．

- (a) μ は，定式的に k 加法的
- (b) 任意の，互いに素な可測集合 $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ に対して， $\nu_{k+1}(A_1, A_2, \dots, A_{k+1}) = 0$ ．
- (c) 任意の，互いに素な可測集合 $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ ， B, C に対して

$$\begin{aligned} & \nu_k(A_1, \dots, A_{k-1}, B \uplus C) \\ &= \nu_k(A_1, \dots, A_{k-1}, B) + \nu_k(A_1, \dots, A_{k-1}, C). \end{aligned}$$

確率測度 m と $f(x) = 0$ を満たす単調増加関数 f を用いて， $\mu(A) = f(m(A))$ で与えられている単調測度を，変形確率測度 (distorted probability) といい f を変形関数 (distortion function) と呼ぶ．変形確率測度は単調関数であるが，この定式的 k -加法性については次の性質が成り立つ．

定理 7 m を強ダルブー性をもつ確率測度とする．($A \subset B$ ， $A, B \in \mathcal{B}$ ， $a \in [m(A), m(B)] \Rightarrow \exists C (A \subset C \subset B)$ s.t. $m(C) = a$.) このとき $f(0) = 0$ を満たす単調増加関数 f に対して，次は同値．

- (a) $\mu = f \circ m$ は定式的に k -加法的
- (b) $f(x)$ は k 次の多項式

5 2つの k -加法性の同値性

一般に，構成的な k -加法的測度は，定式的な k -加法性を持つ．また，変形関数が k 次式の変形確率測度は構成的な k -加法性を持つ．従って，変形確率測度の場合は，構成的 k -加法性と定式的 k -加法性は同等である ([6])．

一般に定式的な k -加法的測度が構成的 k -加法性をもつためには，測度の有界性や連続性に関する性質が必要である．

定義 8 $j \in \mathbb{N}$ にたいして $\mathcal{D}_j$ を次で定める．

$$\mathcal{D}_j = \{\overline{D} = \{D_1, \dots, D_j\} \subset \mathcal{B}, \text{ 互いに素 }\}$$

j 次の調整関数 ν_j にたいして

$$\nu_j(\overline{D}) = \nu_j(D_1, \dots, D_j), \quad (\times) \overline{D} = D_1(\times) \cdots (\times) D_j$$

と表わすことにする．このとき， $\mathcal{B}$ 上の集合関数 μ に対して ν_j の全変動 $\|\nu_j\|$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} \|\nu_j\| &= \sup \left\{ \sum_{\ell=1}^L |\nu(\overline{D}_\ell)| : L \in \mathbb{N}, \overline{D}_\ell \in \mathcal{D}_j, \ell \leq L, \right. \\ &\quad \left. (\times) \overline{D}_\ell \cap (\times) \overline{D}_{\ell'} = \emptyset \text{ if } \ell \neq \ell' \right\}. \end{aligned}$$

μ が k 次の全有界であるとは $\|\nu_j\| < \infty$ ($\forall j \leq k$) を満たすこととする．

次に，集合関数の $\emptyset$ での連続性を次のように定義する．

定義 9 μ を $\mathcal{B}$ 上の集合関数， $\{\nu_j\}$ を対応するメビウス変換とする．このとき ν_j が $\emptyset$ において完全連続であるとは

$$\bigcup_{i=1}^{N_\ell} (\times \overline{D}_i^{(\ell)}) \searrow \emptyset \text{ as } \ell \rightarrow \infty,$$

を満たす任意の集合族の列 $\{\overline{D_i^{(\ell)}}\}_{i=1}^{N_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$ に対して

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N_\ell} |\nu_j(\overline{D_i^{(\ell)}})| = 0.$$

を満たすこととする. さらに μ が $\emptyset$ において k -次の完全連続性をもつとは, 全ての $j \leq k$ に対して $\emptyset$ において ν_j が完全連続であるとする.

これらの概念を用いると, 構成的 k -加法性の十分条件が次のように得られる.

定理 10 σ -集合体 $\mathcal{B}$ が, 可算集合体 $\mathcal{A}$ で生成されるとする. ($\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$). このとき集合関数 $\mathcal{B}$ 上の集合関数 μ が, ある $k \in \mathbb{N}$ に対して, μ が次の (a) ~ (d) を満たすとき, 構成的 k -加法性を持つ.

- (a) 定式的に k -加法的である.
- (b) k -次の全有界性をもつ.
- (c) $\emptyset$ において k -次の完全連続性を持つ.
- (d) 上下からの連続性を持つ. .

6 まとめ

従来 有限集合上の, 集合関数に対して定義されてきた k -加法性を連続的な無限集合上に 2 種類の方法で拡張した. 一般に集合関数及びそれを用いた積分を用いた解析は, 応用分野を中心に盛んにおこなわれている. 加法性がある測度を基礎とした積分, 長い歴史を経て様々な場面で有効に使われてきているだけに, 加法性がない場合も同様の使い方が望まれるが, 一般には十分な性質が整わない場合が多く, 加法性を持つ場合に近い概念が必要とされていると思われる. これまで述べた性質で 非離散化された k -加法性は, 定性的に自然な拡張になっていて, 使いやすい構造を合わせ備えていることが示されたと考えている. これを用いて, 関数解析の手法の充実など様々な方向に発展が期待できる.

参考文献

- [1] R. Mesiar, Generalizations of k -order additive discrete fuzzy measures, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 102, pp. 423-428, 1999
- [2] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 分割型非線形積分の収束定理 (解説論文), 知能と情報 Vol31, No4 pp.108-115 2019
- [3] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 収束定理から見た各種分割型非線形積分の比較, 知能と情報 Vol32, No4 pp.782-791, 2020

- [4] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, Constructive k -additive measure and decreasing convergence theorems, Lecture Notes in Artificial Intelligence 12256 (2020)
- [5] A. Honda, R. Fukuda, Y. Okazaki, Non-discrete k -order additivity of a set function and distorted measure, 2021 投稿中
- [6] R. Fukuda, On Two Generalizations for k -additivity, プレプリント 2021
- [7] Yang, Q. : The pan-integral on the fuzzy measure space, Fuzzy Mathematica (in Chinese), **3** 107-114 (1985)
- [8] Lehrer, E., Teper, R.: The concave integral over large spaces, Fuzzy Sets and Systems, **159**, 2130-2144, 2008.

連絡先

福田亮治

E-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp