

非加法的測度の定める集合環上の Fréchet-Nikodym 一様位相

福田 亮治 (大分大学 理工学部)*¹

本田 あおい (九工大 情報工)*²

岡崎 悦明 (ファジィシステム研究所)*³

1. はじめに

X を集合, $\mathcal{R} \subset 2^X$ を X の部分集合からなる集合環とする. 集合関数 $\mu: \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$ で $\mu(\emptyset) = 0$ を満たすものを非加法的測度と呼ぶ. $A, B \in \mathcal{R}$ に対して, 非加法的測度 μ に関する Fréchet-Nikodym 対称差を $\mu(A \ominus B)$ で定義する. ここでは Fréchet-Nikodym 対称差から定められる $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ の近縁系

$$(*) \quad \{(A, B) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mid \mu(A \ominus B) \leq \epsilon\}, \epsilon > 0$$

が一様構造を定めるか否かを考察する. もし一様構造を定めるなら, $\mathcal{R}$ は一様位相空間であり, $A \in \mathcal{R}$ に対して

$$\{B \mid \mu(A \ominus B) < \epsilon\}, \epsilon > 0$$

を A の基本近傍系とする位相が $\mathcal{R}$ に入る. この位相は pseudo-metrizable であり, $\mathcal{R}$ は加法

$$(A, B) \rightarrow A \oplus B$$

に関して空集合 $\emptyset$ を単位元とする可換位相群になる.

2. 非加法的測度の Fréchet-Nikodym uniformness

定義 1 μ を集合環 $\mathcal{R}$ 上の非加法的測度とする. μ が Fréchet-Nikodym 一様な非加法的測度とは, 近縁系 $(*)$ が $\mathcal{R}$ 上の一様構造の近縁系の基底になることである.

$V_\epsilon = \{(A, B) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mid \mu(A \ominus B) \leq \epsilon\}$ とする. 近縁系 $(*)$ は次の性質を満たしている:

1. $\Delta = \{(A, A) \mid A \in \mathcal{R}\} \subset V_\epsilon$,
2. $V_\epsilon^{-1} = V_\epsilon$, ただし $(A, B) \in V_\epsilon^{-1} \iff (B, A) \in V_\epsilon$,
3. V_ϵ は平行移動不変, 即ち $(A, B) \in V_\epsilon \iff (A \oplus C, B \oplus C) \in V_\epsilon$.

従って近縁系 $(*)$ が $\mathcal{R}$ 上の一様構造の近縁系の基底になるための必要十分条件は, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して

$$V_\delta \circ V_\delta \subset V_\epsilon$$

となることである ([1]). ここに

$$V_\delta \circ V_\delta = \{(A, C) \mid \exists B \in \mathcal{R}; (A, B), (B, C) \in V_\delta\}$$

.

2010 Mathematics Subject Classification: 28A10, 28A12, 28E10, 26E50

キーワード: 非加法的測度, Fréchet-Nikodym difference, 一様空間, 準単調集合関数

*¹e-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp

*²e-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp

*³e-mail: okazaki@flsi.or.jp

定義 2 非加法的測度 $\mu: \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$ が準単調とは、ある定数 M が存在して、 $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq M\mu(B)$ となることである。

定理 3 μ を準単調非加法的測度とする。このとき、 μ が Fréchet-Nikodym 一様な非加法的測度であるための必要十分条件は、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して

$$(**) \quad \mu(A) \leq \delta, \mu(B) \leq \delta, A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow \mu(A \cup B) \leq \epsilon$$

が成り立つことである。

注意 4 条件 $(**)$ は Dovrakov と Farkova による (p.g.p)-condition である ([2])。

定義 5 非加法的測度 μ が準劣加法的とは、定数 K が存在して

$$\mu(A \cup B) \leq K(\mu(A) + \mu(B)), A, B \in \mathcal{R}$$

が成り立つことである。

Corollary 6 非加法的測度 μ が準単調かつ準劣加法的ならば、 μ は Fréchet-Nikodym 一様な非加法的測度である。

注意 7 Drewnowski([3]) は次の性質を持つ集合環 $\mathcal{R}$ 上の位相を考察した：

1. 和演算 $(A, B) \rightarrow A \oplus B$ は連続である,
2. 積演算 $(A, B) \rightarrow A \cap B$ は連続である,
3. $\emptyset$ の任意の近傍 U に対して、 $\emptyset$ の近傍 V が存在して

$$B \in \mathcal{R}, B \subset A \in V \Rightarrow B \in U$$

が成り立つ。

この位相が存在すれば、 $\mathcal{R}$ は位相環である。特に μ が submeasure の場合にこれらの 3 条件を満たす位相 (F-N-位相) の存在とその性質が研究された。尚、Pap([4]), 5 章 2 節に詳しい記述がある。

我々は条件 1 のみを満たす一様位相を考察している。

参考文献

- [1] N. Bourbaki, Elements de Mathematique, Topologie General, Chapitres 2, Hermann, Paris, 1965.
- [2] I. Dovrakov and J. Farkova, On submeasures II, Math. Slovaca, 30, No.1, 65-81, 1980.
- [3] L. Drewnowski, Topological rings of sets, continuous set functions, integration I, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astronom. Phys. 20, 269-276, 1972.
- [4] E. Pap, Null-additive set functions, Kluwer Academic Publishers, 1995.