

Choquet 積分による関数空間 $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$ の一様構造

本田あおい (九工大情報工)*¹

福田 亮治 (大分大理工)

岡崎 悦明 (ファジィシステム研究所)

1. はじめに

X を集合, $\mathcal{B}$ を X 上の σ -集合体とする. $\mathcal{B}$ 上の非負集合関数 $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ が $\mu(\emptyset) = 0$ をみたすとき, μ を非加法的測度と呼ぶ. μ が単調であるとは, $A \subset B, A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ をみたすことである. 以下 μ は単調な非加法的測度とする. 非負可測関数 $f: (X, \mathcal{B}) \rightarrow [0, \infty)$ に対して, Choquet 積分は次で定義される:

$$(\text{Ch}) \int_X f d\mu = \int_0^\infty \mu(f > r) dr.$$

Choquet 積分の定める関数空間 $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$ を次で定める.

$$\mathcal{L}_1(\text{Ch}) = \left\{ f: (X, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R} \mid (\text{Ch}) \int_X |f| d\mu = \int_0^\infty \mu(|f| > r) dr < \infty \right\}.$$

本講演では $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$ に一様構造を定めるための μ の条件を考察する. 一様構造は対角線集合 $\Delta = \{(f, f) \mid f \in \mathcal{L}_1(\text{Ch})\} \subset \mathcal{L}_1(\text{Ch}) \times \mathcal{L}_1(\text{Ch})$ の近縁系を指定し, 距離位相を一般化した位相を $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$ に与えるものである. ここでは $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$ の一様構造を定めると期待される近縁系として

$$V_\varepsilon = \left\{ (f, g) \in \mathcal{L}_1(\text{Ch}) \times \mathcal{L}_1(\text{Ch}) \mid (\text{Ch}) \int_X |f - g| d\mu \leq \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

を採用する. $\{V_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ が一様構造の基本近縁系となれば,

$$W_\varepsilon(f) = \left\{ g \in \mathcal{L}_1(\text{Ch}) \mid (\text{Ch}) \int_X |f - g| d\mu \leq \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

を f の基本近傍系とする位相 τ がただ一つ $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$ 上に定まり, $(\mathcal{L}_1(\text{Ch}), \tau)$ は群演算 $(f, g) \rightarrow f - g$ により位相群となる.

2. 一様構造 (一般論)

S を集合とし, $\Delta = \{(s, s) \mid s \in S\}$ により対角線集合 Δ を定める. 一様構造を記述するための集合演算として, $V, W \subset S \times S$ に対して次のように定める.

$$V^{-1} = \{(s, t) \mid (t, s) \in V\}, \quad W \circ W = \{(s, t) \mid \exists u \in S, (s, u) \in W, (u, t) \in W\}.$$

定義 1 (ブルバキ位相 [1] 2章, 2節, 5節) 集合族 $\mathcal{V} \subset 2^{S \times S}$ が近縁の基本系であるとは次の 1.~4. を満たすこととする.

1. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, に対して $V \subset V_1 \cap V_2$ を満たす $V \in \mathcal{V}$ が存在する.

2010 Mathematics Subject Classification: 28B15, 05A19

キーワード: ショケ積分, 一様構造, 関数空間 $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$

*¹ e-mail: ao@aikyutech.ac.jp

2. 任意の $V \in \mathcal{V}$ は $\Delta \subset V$ を満たす.
3. 任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して $W \subset V^{-1}$ を満たす $W \in \mathcal{V}$ が存在する.
4. 任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して $W \circ W \subset V$ を満たすような $W \in \mathcal{V}$ が存在する.

$\mathcal{V}$ が近縁系の基本系である場合 $U \in \mathcal{U} \iff \exists V \in \mathcal{V} \text{ s.t. } V \subset U$ により一様構造を持つ近縁系 $\mathcal{U}$ を定めることが出来る [1].

3. $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$ の一様構造

$$V_\varepsilon = \left\{ (f, g) \in \mathcal{L}_1(\text{Ch}) \times \mathcal{L}_1(\text{Ch}) \mid (\text{Ch}) \int_X |f - g| d\mu = \int_0^\infty \mu(|f - g| > r) dr \leq \varepsilon \right\}$$

は次の性質をみたす:

- (i) $\forall \varepsilon > 0, \Delta \subset V_\varepsilon$, (ii) $V_\varepsilon^{-1} = V_\varepsilon$,
- (iii) $\forall \varepsilon > 0, \forall h \in \mathcal{L}_1(\text{Ch})$ に対して, $(f, g) \in V_\varepsilon \iff (f - h, g - h) \in V_\varepsilon$.

定義 2 μ が $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$ 一様測度であるとは, 次の条件が成り立つこと:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; V_\delta \circ V_\delta \subset V_\varepsilon \text{ (定義 1 の条件 4)}.$$

定理 3 μ が $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$ 一様測度であることと次の (1)(2)(3) は同値である.

(1) $\forall f_n, g_n \in \mathcal{L}_1(\text{Ch})$ に対して

$$(\text{Ch}) \int_X |f_n| d\mu \rightarrow 0, (\text{Ch}) \int_X |g_n| d\mu \rightarrow 0 \Rightarrow (\text{Ch}) \int_X |f_n - g_n| d\mu \rightarrow 0.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta; (\text{Ch}) \int_X |f| d\mu < \delta, (\text{Ch}) \int_X |g| d\mu < \delta \Rightarrow (\text{Ch}) \int_X |f - g| d\mu < \varepsilon.$

(3) $\mathcal{L}_0(\text{Ch})$ は演算 $(f, g) \rightarrow f - g$ により位相群.

(1) は Dovrakov-Farková の (p.g.p)-条件の Choquet 積分版である. μ が $\mathcal{L}_1(\text{Ch})$ 一様測度のとき, open (closed) sphere problem [3, 4, 6, 7] が成り立つための必要十分条件を考察できる.

参考文献

- [1] N. Bourbaki, Éléments de Mathématique, Topologie Général, Chapitres 2, Hermann, Paris, 1965.
- [2] I. Dovrakov and J. Farková, On submeasures II, Math. Slovaca, 30, No. 1, 65-81, 1980.
- [3] J. Kawabe, The topology on the space of measurable functions that is compatible with convergence in nonadditive measure, Fuzzy Sets and Systems, 430, Non-additive Measures and Integral, 1-18 2022.
- [4] A. Zimper, S. Zimper and J. Kawabe, Base topologies and convergence in non-additive measure, Fuzzy Sets and Systems, 457, Non-additive Measures and Integral, 1-19, 2023.
- [5] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 非加法的測度の定める集合環上の Fréchet-Nikodym 一様構造, 2023 年日本数学会年会 (中央大学) 予稿, 2023.
- [6] 本田あおい, 福田亮治, 岡崎悦明, Uniformness of a non-additive measure and the closedness (openness) of a ball for the topology of convergence in non-additive measure, 2023 年実解析シンポジウム (大和大学) 予稿, 2023.
- [7] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 準加法測度が導く $\mathcal{L}_0$ 上の一様構造 2024 年日本数学会年会 (大阪公立大) 予稿, 2023.