

非加法的測度の定める関数空間の位相線形構造

福田 亮治 (大分大学・理工)*¹

本田あおい (九州工業大学・情報工)*²

岡崎 悦明 (ファジィシステム研究所)*³

1. はじめに

X を集合, $\mathcal{R} \subset 2^X$ を X の部分集合からなる σ -algebra とする. 集合関数 $\mu: \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$ で $\mu(\emptyset) = 0$ を満たすものは非加法的測度と呼ばれる [5]. 非加法的測度に関する積分 $(\#) \int_X f d\mu$ として多くの積分が定義される. 例えば $(\#)$ として

菅野積分, Shilkret 積分, Choquet 積分, Pan 積分, SD 積分, 凹積分, 凸積分.

本講演ではこれらの積分の定める関数空間 $\mathcal{L}_1$ を念頭にその位相線形構造を調べる. このため次の $\mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}_0$ 上の関数

$$I(f, g) = (\#) \int_X |f - g| d\mu$$

を導入し, $I(f, g)$ の定める近縁系

$$(*) \quad V_\varepsilon = \{(f, g) : I(f, g) \leq \varepsilon\}, \varepsilon > 0$$

が関数空間 $\mathcal{E}(\mu) = \{f : (\#) \int_X |f| d\mu < +\infty\}$ の一様構造を定める近縁系の基底になるかどうかを検証する. もし一様構造を定める近縁系の基底になれば $\mathcal{E}(\mu)$ は一様空間であり, さらに

$$U_\varepsilon(f) = \{g : I(f, g) \leq \varepsilon\}, \varepsilon > 0$$

を $f \in \mathcal{E}(\mu)$ の基本近傍系とする位相 $\mathcal{T}$ が $\mathcal{E}(\mu)$ 上に定まる. $I(f, g)$ の平行移動不変性 $I(f+h, g+h) = I(f, g)$, $f, g, h \in \mathcal{E}(\mu)$, 特に $U_\varepsilon(f) = U_\varepsilon(0) + f$ に注意すれば, $(\mathcal{E}(\mu), \mathcal{T})$ は演算 $(f, g) \rightarrow f - g$ により位相群となる.

本研究の目標は近縁系 $(*)$ が一様構造を定める近縁系の基底になるような非加法的測度 μ のクラスを定性的に特定することである.

2. $\mathcal{E}(\mu)$ の一様性を導く非加法的測度 μ

$(*)$ が一様構造を定める近縁系の基底となるための必要十分条件は以下の4条件を満たすことである (プルバキ位相1, 2章):

1. $\forall \varepsilon, \delta > 0, \exists \gamma > 0; V_\gamma \subset V_\varepsilon \cap V_\delta,$

2. $\Delta \subset V_\varepsilon, \text{ for } \forall \varepsilon > 0,$

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; V_\delta \subset V_\varepsilon^{-1}, \text{ and}$

4. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; V_\delta \circ V_\delta \subset V_\varepsilon.$

*¹e-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp

*²e-mail: aoi@ai.kyutech.ac.jp

*³e-mail: okazaki@flsi.or.jp

但し $(f, g) \in V_\varepsilon^{-1} \Leftrightarrow (g, f) \in V_\varepsilon$, $V_\delta \circ V_\delta = \{(f, g) \mid \exists h; (f, h) \in V_\delta, (h, g) \in V_\delta\}$.

(*) が上記公理を満たせば、近縁系

$$\mathcal{U} := \{W : \exists \varepsilon > 0; V_\varepsilon \subset W\}$$

は $\mathcal{E}(\mu)$ に一様構造を定める.

近縁系 (*) は条件 1, 2, 3 を満たしている. したがって近縁系 (*) が $\mathcal{E}(\mu)$ 上の一様構造の近縁系の基底になるための必要十分条件は次で与えられる (上記の条件 4):

$$(**) \quad \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } \delta > 0 \text{ が存在して, } V_\delta \circ V_\delta \subset V_\varepsilon.$$

定義 1 非加法的測度 μ が一様測度であるとは条件 (**) を満たすこと.

定理 2 μ が一様測度であるための必要十分条件は

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; I(f, 0) \leq \delta, I(g, 0) \leq \delta \Rightarrow I(f - g, 0) \leq \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; U_\delta - U_\delta \subset U_\varepsilon$$

$\Leftrightarrow$

$$I(f_n, 0) \rightarrow 0, I(g_n, 0) \rightarrow 0 \Rightarrow I(f_n - g_n, 0) \rightarrow 0 \text{ ((p.g.p.) - condition[2])}.$$

μ が一様測度であれば, $\mathcal{E}(\mu)$ は演算 $(f, g) \rightarrow f - g$ により位相群である. 菅野積分以外は, $(\#) \int_X |cf| d\mu = |c|(\#) \int_X |f| d\mu$ より, $\mathcal{E}(\mu)$ は線形空間となる. SD 積分なら quasi-normed space であり, 凸積分ならノルム空間である.

3. 開球 $O_\varepsilon(A)$ (閉球 U_ε) が開集合 (閉集合) である条件

近傍たち $O_\varepsilon(0) = \{g : I(g, 0) < \varepsilon\}$ (resp. $U_\varepsilon(0)$) が一様位相 $\mathcal{T}$ に関して開集合 (resp. 閉集合) であるか否かは自明ではない. この問題は一般の可測関数のなす関数空間への位相の導入と合わせて J. Kawabe[4], A. Zimper, S. Zimper and J. Kawabe[6] により研究されている. 本講演では, これらの近傍の開集合条件 (閉集合条件) を与える μ の新しい連続性条件を導入し開集合 (閉集合) となる必要十分条件を与える.

参考文献

- [1] N. Bourbaki, Éléments de Mathématique, Topologie Général, Chapitres 2, Hermann, Paris, 1965.
- [2] I. Dovrakov and J. Farková, On submeasures II, Math. Slovaca, **30**, No.1, 65-81, 1980.
- [3] A. Honda, R. Fukuda and Y. Okazaki, Unifor structure and topological group properties of non-additive measure algebras, preprint.
- [4] 福田亮治, 本田あおい, 岡崎悦明, 分割型非線形積分の収束定理, 日本知能情報フuzzy学会誌, Vol. 31, No. 4, 108-115(2019).
- [5] J. Kawabe, The topology on the space of measurable functions that is compatible with convergence in nonadditive measure, Fuzzy Sets and Systems, 430, 1-18. Non-additive Measures and Integral.
- [6] A. Zimper, S. Zimper and J. Kawabe, Base topologies and convergence in nonadditive measure, Fuzzy Sete and Systems, 457, 1-19(2023). Non-additive measures and Integrals.